QÜESTIIÓ, Vol 12, nº 2, pp. 159-174

ARBRES MINIMALS I ARBRES DE STEINER EN LA MÈTRICA RECTILÍNIA

J.M. BASART i L. HUGUET
Universitat Autònoma de Barcelona

Usant la mètrica rectilínia (oL_1) es tracten alguns aspectes del problema clàssic de trobar l'arbre de cost mínim que enllaça un conjunt donat P de punts en el pla.

En primer lloc es recullen les propietats fonamentals dels arbres de Steiner donat que aquests són la solució general al problema enunciat. A partir d'unes observacions sobre l'afitament de la seva longitud màxima quan P es troba en l'interior d'un quadrat Q de costat unitat, s'obté -pel mateix cas- una fita superior per a la longitud de l'arbre minimal donat per l'algorisme de Prim o el de Kruskal.

Finalment, es dóna un mètode per a construir -quan existeixen- arbres de rectangles a distància mínima. Aquests arbres fan que el problema inicial sigui resoluble mitjançant mètodes polinomials, trencant així la característica de NP-complet que presenta en el cas general la recerca dels arbres de Steiner

Shortest trees and Steiner trees with rectilinear distances.

Keywords: Steiner tree probblem, rectilinear distance, graph algorithm.

1. INTRODUCCIÓ

A L_1, la **distància rectilínia** entre dos punts del pla $P_i = (x_i, y_i)$ i $P_j = (x_j, y_j)$ ve donada per l'expressió

$$|x_i - x_j| + |y_i - y_j|.$$

-J.M. Basart i L. Huguet - Universitat Autònoma de Barcelona. Facultat de Ciències. Dept. d'Informàtica - Bellaterra
-Article rebut el Maig de 1988

El **problema de Steiner (PS) a $\mathbf{L}_1$**, por ser definit així:

donat un conjunt de punts $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ en el pla, volem interconnectar-los usant la distància rectilínia de manera que es minimitzi la longitud total dels segments usats.

L'ús de la mètrica L_1 en el problema que ens ocupa, fou suggerit per Hannan [7] l'any 1966. En aquella època, la seva aplicació fonamental havia de ser optimitzar la longitud del cablejat entre els elements dels circuits impresos.

Això vol dir que els segments que tracem per a interconnectar els n punts seran sempre línies paral.leles o perpendiculars als eixos de coordenades. Anomanarem **arbre de Steiner** a tota solució per a un problema de Steiner.

Per tal d'assolir un arbre de Steiner, caldrà usar un conjunt addicional de punts $S = (s_1, s_2, ...)$ que serà funció de la configuració de punts inicial. Aquests nous punts s'anomenen **punts de Steiner** i serveixen per a considerar segments que no uneixin dos punts de P, però que contribueixin a reduir la longitud total de la solució. En el problema clàssic de trobar l'arbre de cost mínim que interconnecta n punts, només es poden usar segments que enllacin dos dels n punts considerats, el resultat es l'**arbre minimal** associat a la distribució P.

És important destacar que tant en el cas de la mètrica rectilínia, com en el de la mètrica euclidiana, el problema és NP-complet [6].

Pel que fa referència als algorismes usats en el PS, cal destacar en primer lloc que la immensa majoria dels publicats -[2],[7],[8],[10],[11],[13],[14],...- són heurístics. Només Winter en el seu treball [16] dóna referència de dos algorismes exactes [1], els quals només esdevenen aplicables en certs tipus de configuracions.

Quant als aproximats, la majoria obtenen un estalvi mitjà de longitud -en relació a l'arbre minimal- d'un 8-10% i solen presentar una complexitat $0(n^2)$ o $0(n\log n)$.

2. PROPIETATS FONAMENTALS DE LA SOLUCIÓ

Les quatre primeres propietats ací esmentades poden ser revisades en el mateix treball de Hanan.

($P1$) En cada P_i hi incideixen 4 o menys segments.

($P2$) En cada s_i hi incideixen 3 o 4 segments.

($P3$) El nombre de punts de Steiner és $\leq n-2$.

($P4$) Els punts de Steiner es troben sempre en les interseccions de la reixa $R(P)$ formada pel conjunt de rectes que passen horitzontalment o vertical pel conjunt de punts P donat.

($P5$) Es verifica la següent relació de longituds entre l'arbre de Steiner AS i l'arbre de cost mínim AM

$$AS/AM \geq 2/3$$

Aquesta darrera propietat (P5) és deu anys posterior a les establertes per Hannan i fou provada via inducció sobre el nombre de punts, per Hwang [9] en un extens treball monogràfic.

Notem que la fita s'assoleix per a $n = 4$ quan cada punt es troba situat en el centre d'un dels costats d'un quadrat.

És de destacar que ($P5$) implica la possibilitat d'obtenir un estalvi de longitud superior al 33% si comparem l'arbre de Steiner amb el seu arbre minimal corresponent. Aquest fet, juntament amb la diversitat d'aplicacions sorgides per al cas rectilini, i la major simplicitat geomètrica del problema en comparació amb el seu equivalent usant la distància euclidiana, han motivat un interès preferencial per la L_1 en la majoria dels treballs de recerca dels darrers anys.

Una qüestió interessant sobre els arbres de Steiner és donar una fita superior de la seva longitud quan considerem els n punts col.locats a l'interior d'un quadrat de costat unitat. En ací destaquen els treballs de Chung i Graham [3] i Chung i Hwang [4].

Si $\sigma(n)$ representa la longitud màxima que pot assolir l'arbre de Steiner per a una configuració de n punts tancats en un quadrat de costat igual a 1, aleshores tenim que $\sigma(t^2 + m) \leq 1 + t + (m/2t)$ on $-t < m \leq t$.

A més si $n = t^2$ aleshores $\sigma(n) = 1 + t$, i tot indica -encara que no ha estat provat- que:

(i) $\sigma(t^2 + 1) = \sigma(t^2)$, i que

(ii) $\sigma(n) \leq 1 + \sqrt{n}$ per a tota t i tota n respectivament.

En la figura 1 es presenten exemples de casos en els quals s'assoleix la fita, per a $n = 4, 9$ i 16. El mètode general per a obtenir-los és simplement distribuir els $n = t^2$ punts de forma equidistant en t files i t columnes. Aleshores, donat que en la reixa $R(P)$ les úniques cruïlles es donen precisament en punts de P, no es poden crear punts de Steiner, i per tant caldran $t^2 - 1$ segments de longitud $1/(t-1)$ per a formar l'arbre; i tots junts sumen $1 + t$

És de destacar, que no coneixem, ni hem pogut trobar, cap altre tipus de configuració per a $n = t^2$ que verifiqués la igualtat en la fita donada. De la mateixa manera notem que en el tipus de distribució dels punts de la fig. 1 és sempre possible afegir-n'hi qualsevol altre sense augmentar la longitud de l'arbre; simplement cal anar desplaçant horitzontalment un dels $t - 1$ segments verticals fins arribar a col.locar-lo damunt del nou punt.

D'altra banda es coneixen els valors exactes de $\sigma(n)$ per a $n = 2,3,4,5,6,7,8,9$ i 10. Els presentem en la taula següent:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	2	2	3	3	10/3	7/2	11/3	4	4

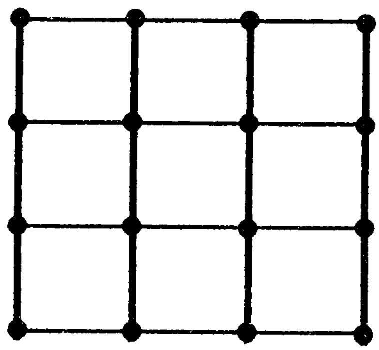

Figura 1

3. OBTENCIÓ D'UNA FITA $\phi(n)$ PER A L'ARBRE MINIMAL

Considerant la distància rectilínia, donats n punts en l'interior o perímetre d'un quadrat Q, direm que formen una **configuració equiespaida (c.e.)** de distància d si:

(i) per a qualsevol dels n punts es verifica que cadascun dels altres $n-1$ punts es troba a distància d o $2d$ o $3d$ ... o rd essent r un natural,

(ii) el fet de canviar de lloc un punt qualsevol de la configuració disminueix la longitud AM de l'arbre minimal que els interconnecta, i

(iii) si hi afegim un altre punt i avaluem la longitud AM' de l'arbre minimal que uneix els $n+1$ punts tenim que $AM = AM'$.

Usarem $\mathbf{C(r)}$ per a designar una c.e. per a r punts, provat que aquesta existeixi:

Representem a continuació $C(8)$ (fig. 2)

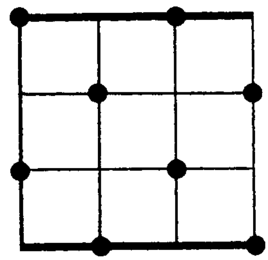

Figura 2

És fàcil comprovar que no existeix una c.e. per a tot n natural, aquest és el cas per exemple de $n = 3$; d'altra banda quan existeix no té tampoc perquè ser única, tal com succeeix si $n = 2$.

Si tracem la reixa R relativa a una $C(n)$ de distància d obtenim una partició del Q inicial en una quadrícula de cel-les homogènies de costat igual a $d/2$ on cadascuna d'aquestes cel.les conté exactament dos dels n punts.

Per la propietat (i), en tota $C(n)$ l'arbre minimal pot ser format unint els dos punts situats en els vèrtexs oposats de $n-1$ dels quadrats de Q mitjançant un total de 2(n-1) segments de longitud $d/2$.

D'altra banda, aquests quadrats de costat $d/2$ formen una tessel.lació de Q -encaixen omplint tot Q. Així doncs, per a cada punt P_i tenim que P_i està tan allunyat com és possible dels altres $n-1$ punts.

El que interessa de les c.e.'s -de n punts- és que assoleixen la longitud màxima en el seu arbre minimal associat, si considerem els arbres minimals correspo- nents a cadascuna de les possibles configuracions de n punts dins de Q.

Efectivament:

donada una n tal que $C(n)$ existeix amb distància d sabem que el seu arbre minimal associat té longitud $d(n-1)$ dins de Q.

Sigui ara D una distribució qualsevol de n punts dins de Q en el qual hem dibuixat les cel.les que formava $C(n)$, i siguin $k_1, k_2, ..., k_r$ les cel.les. Conside- rem que la cel.la k_i conté n_i del n punts on $i = 1, 2, ..., r$. Si convenim que tot punt dels n donats a D que es trobi en la frontera entre dues o quatre cel.les serà assignat a una qualsevol de les cel.les afectades, tenim que $n_1+n_2+...+n_r = n$.

L'arbre minimal que uneix els n_j punts continguts en la cel.la k_j, $j = 1, 2, .., r$ té sempre longitud inferior o igual a $d(n_j - 1)$, per tant la longitud de l'arbre minimal per a D - que representem per $AM(D)$- serà inferior o igual a la longitud total donada per la interconnexió dels arbres minimals corresponents a cadascuna de les r cel.les, és a dir:

$$AM(D) \leq d(n_1 - 1) + d(n_2 - 1) + ... + d(n_r - 1) + d(r - 1) =$$
$$= d(n_1 + n_2 + ... + n_r - r + r - 1) = d(n - 1)$$

Notem que la igualtat s'assoleix si $D = C(n)$.

És fàcil comprovar que les c.e.'s $C(j)$ es poden formar progressivament prenent els valors:

$j = 2$, $5 = 2+3$, $8 = 5+3$, $13 = 8+5$, $18 = 13+5$, $25 = 18+7$, $32 = 25+7$,..

(veure la figura 3.)

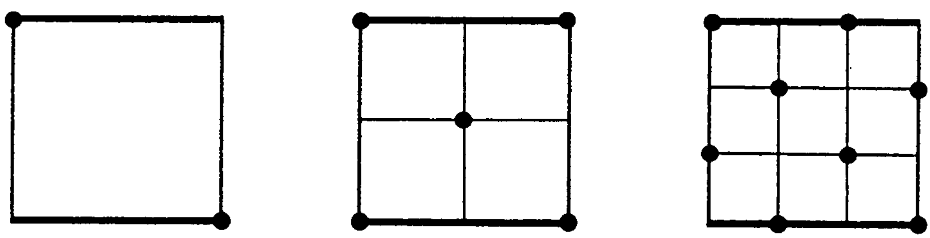

Figura 3

on sumant els termes de la progressió es dedueix que en general les $j's$ vénen donades per la successió

$$S_k = \begin{cases} k(k+2)/2 + 1 & \text{si } k \text{ és parell} \\ k(k+2)/2 + 1/2 & \text{si } k \text{ és senar} \end{cases}$$
$$k = 1, 2, 3, ...$$

De la mateixa manera, per càlcul directe obtenim que la longitud de l'arbre minimal que uneix els S_k punts de $C(S_k)$ ve donada per

$$AM(C(S_k)) = (S_k - 1)\ 2/k = \begin{cases} k+2 & \text{si } k \text{ és parell} \\ k+2-1/k & \text{si } k \text{ és senar.} \end{cases}$$

En la taula següent reflectim alguns dels primers resultats que s'obtenen de les expressions anteriors.

k	S_k	$AM(C(S_k))$
1	2	2
2	5	4
3	8	14/3
4	13	6
5	18	34/5
6	25	8
7	32	62/7
8	41	10
9	50	98/9
10	61	12

Tenim doncs com a conclusió que el cost de l'arbre minimal per a $C(S_k)$ en el quadrat és una fita superior $\phi(S_k)$ per al cost de l'arbre minimal en tota distribució de S_k punts en el mateix quadrat, i que aquesta fita s'assoleix si els S_k punts formen una configuració equiespaiada.

Diguem finalment que per analogia amb el cas de la fita $\sigma(n)$ per a l'arbre de Steiner, la propietat que verificava la configuració de punts considerada allà quan teníem $n = t^2$ i la propietat (iii) de les c.e.'s indueixen a plantejar una conjectura similar: es verifica $\phi(S_k) = \phi(S_k + 1)$ per a tot S_k?

La resposta és no; i un contraexemple es dóna quan $k = 3$ ja que $\phi(2) = 2$ i en canvi $\phi(3) = 2.5$.

4. ELS ARBRES DE RECTANGLES

Una qüestió molt interessant sobre els arbres de Steiner a L_1, suggerida l'any 80 per Farley et al. [5] és aquesta: ¿de quina manera podem eliminar parts de la reixa $R(P)$ -veure $(P4)$ de l'apartat 2- sense que això afecti el cost de l'arbre de Steiner?

És evident que aquesta "retallada" de la reixa serà útil, donat que potser hi haurà després algun algorisme que en un temps sensiblement inferior pugui trobar la solució. En qualsevol cas, si el temps per fer la reducció de $R(P)$ és acceptable, el fer-la por millorar l'efectivitat dels algorismes ja coneguts.

Un **arbre de rectangles** o **RT** és un conjunt de rectangles adjacents format per punts units mitjançant segments verticals i horitzontals, que pot ser construït a partir d'un rectangle inicial aplicant la següent operació un nombre finit de vegades:

afegir un nou rectangle, identificant una de les seves arestes amb una aresta $\underline{a}$ en la cara exterior d'un dels rectangles que tenim, de manera que cap vèrtex de $\underline{a}$ tingui ja grau -nombre de segments adjacents- igual a 4.

Una **aresta-terminal** és tot aquell segment d'un RT en el qual els seus dos vèrtexs tenen grau 2. Un conjunt de punts P en el pla **genera** un RT, que representarem per **RT(P)**, si existeix un RT que pot ser construït a partir de la definició de RT, tal que:

1er pel cap baix dos vèrtexs no adjacents del rectangle inicial coincideixin amb punts de P, i

2^{on} pel cap baix un vèrtex de cada nova aresta-terminal, i al menys un vèrtex de l'aresta ja existent que és identificada amb una aresta del nou rectangle, es troben a P

Un punt p d'un conjunt de punts P en el pla, s'anomenarà **aïllat** si no hi ha altres punts de P en les línies vertical i horitzontal que passen a través de p. En tot $RT(P)$ hi haurà doncs com a màxim, un punt aïllat.

Un RT **de distància mínima** és un RT tal que la longitud del camí més curt a RT entre qualsevol parella de vèrtexs, és igual a la seva distància rectilínia en el pla.

En la figura 4 tenim diferents exemples de RT's, mentre que en la figura 5 tenim un exemple de RT de distància mínima.

Els resultats fonamentals del treball [5] són que:

1er un RT és de distància mínima si i només si tota parella de vèrtexs de grau 4 units per un camí sempre vertical o bé sempre horitzontal, es troben connectats mitjançant un segment interior al RT, i

2^{on} donat P i un seu $RT(P)$ de distància mínima, l'arbre de Steiner per a $R(P)$ i el corresponent a $RT(P)$ tenen la mateixa longitud.

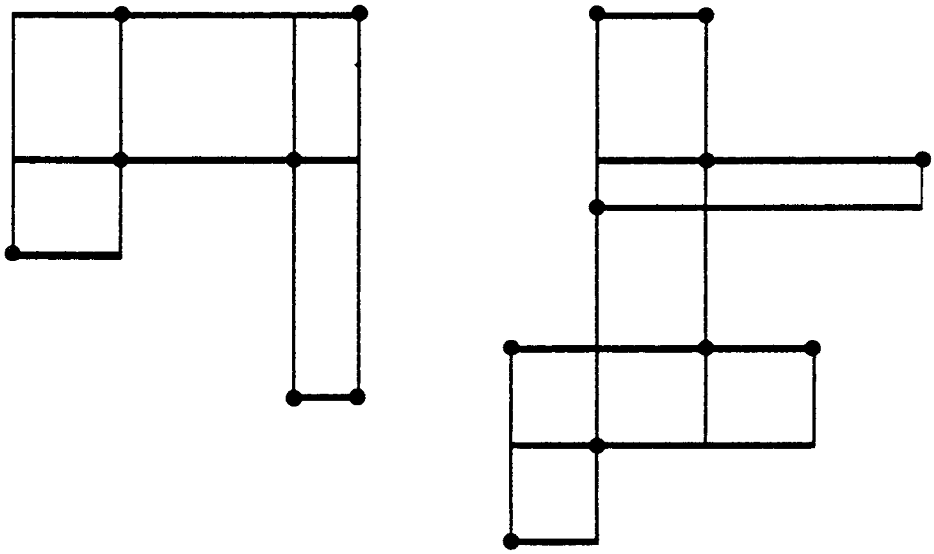

Figura 4

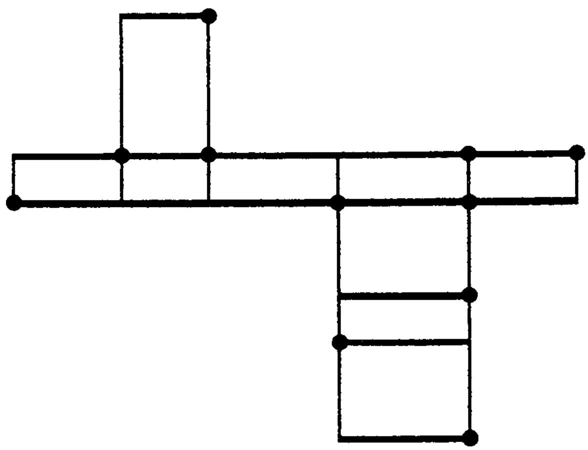

Figura 5

El darrer resultat és el que justifica l'interés en els RT's. Donat que per definició tot RT és un graf "outerplanar", és a dir, és pla i té tots els seus vèrtexs en els arestes exteriors, pot usar-se -per exemple- l'algorisme de Wald i Colbourn [15] per a trobar un arbre de Steiner en un temps $0(n)$.

Pel que fa al primer resultat donat, permet caracteritzar els onze tipus de RT's de distància mínima que es poden donar.

D'aquests onze tipus ja en parlarem en el següent apartat, de moment però el que cal per a tancar el procés, és disposar d'algun algorisme que permeti donat P, determinar si existeix un $RT(P)$ de distància mínima, i en cas afirmatiu que el trobi.

Tant Winter [16] com Farley et al. [5] anuncien que n'estan desenvolupant un, però pel que sabem, a hores d'ara no han estat encara publicats. En canvi Provan [12] usant el concepte de regió $\lceil$ rectilíniament convexa s'hi acosta molt més; de fet, l'existència d'aquesta regió dóna una condició necessària i suficient d'existència d'un arbre de rectangles de distància mínima. Tot i això, no arriba a dir com obtenir-lo a partir de $\lceil$.

5. OBTENCIÓ D'UN RT DE DISTÀNCIA MÍNIMA

L'algorisme que hem desenvolupat basant-nos en alguns dels resultats de l'apartat anterior, i en l'estratègia habitual del backtracking, cerca un RT de distància mínima de manera que: si existeix el troba, i si no existeix ho detecta.

Abans de veure l'esquema del mètode descriurem la funció de les variables i etiquetes usades:

– variables:

seguir; és booleana i controla quan hem d'acabar la recerca, sigui perquè tenim la solució, o bé perqué no n'hi ha, i

nivell; pren valors enters d'1 a n, per a identificar quants punts tenim en el RT que anem formant. Això ens serveix igualment quan fem backtrack, per a controlar en quin "nivell" de tornada enrere ens trobem.

–etiquetes;

rectangle-inicial; fa referència al rectangle que prenem per a començar a formar el RT,

rentangle-no-provat; identifca -en cada valor que pren *nivell*- cadascun dels rectangles que encara poden ser assajats en la solució. Inicialment tots els rectangles es consideren no-provats.

rectangle-present; s'assigna al rectangle que estem actualment considerant per veure si pot ser acceptat en el RT que portem fins el moment, i

rectangle-anterior; identifica el darrer rectangle acceptat en el RT.

Vist això, l'esquema és el següent:

```
INICI
      seguir:=si;
      traçar la reixa R(P) pel conjunt P dels n punts;
      si hi ha més d'un punt aïllat aleshores
      INICI
         escriure (' no existeix RTde distància mínima');
         seguir:=no
FI
sinó
         si n'hi ha un aleshores formar amb ell el rectangle-incial
         sinó formar un rectangle-inicial qualsevol en funció de R(P);
nivell:=2;
RT-actual:={};
el rectangle-inicial deixa de ser rectangle-no-provat;
obtenir un rectangle-no-provat;
mentre seguir=si fer
INICI
         usant R(P) afegir el rectangle-no provat- al RT-actual; sigui aquest
         afegit al rectangle-present;
         determinar l'àrea d'acceptació Θ pel RT-actual;
         si algun punt fora del RT-actual no és dins Θ aleshores
         INICI
              repetir
                    treure el rectangle-present;
                    examinar si existeix un rectangle-no-provat;
                    si no existeix aleshores
                    INICI
                         el rectangle-present deixa de ser rectangle-no-provat;
                         el rectangle-anterior passa a rectangle-present;
                         etiquetar com rectangle-no-provat els que ho havien
                         deixat de ser durant el valor actual de nivell;
                         nivell:=nivell-1;
```

```
            examinar si existeix un rectangle-no-provat;
        FI
    fins que (existeixi rectangle-no-provat) o
            (rectangle-present=rectangle-inicial);
    si rectangle-present=rectangle-inicial aleshores
        si no existeix rectangle-no-provat aleshores
        INICI
            escriure(' no existeix RT de dist. mín.');
            seguir:=no
        FI
        sinó
        INICI
            el rectangle-present deixa de ser rectangle-no-provat;
            el rectangle-no-provat passa a rectangle- inicial
        FI
FI
sinó
INICI
    nivell:=nivell+1;
    si tots els punts són en el RT-actual aleshores
    INICI
            escriure('el RT-actual és la solució');
            seguir:=no
        FI
        sinó determinar un rectangle-no-provat;
    FI
FI;
FI.
```

Durant la construcció del RT que vol arribar a ser de distància mínima, entenem per **àrea d'acceptació Θ** de nous punts, aquella regió o agrupació de regions del pla, en la qual han d' estar necessàriament tots els punts no inclosos en el RT actual, per tal que aquest pugui continuar essent candidat a RT de distància mínima. Malauradament aquesta condició és necessària però no suficient de manera que el fet que tots hi siguin no implica pas que arribem a obtenir un RT de distància mínima.

Amb la determinació i el control de Θ sabem si podem engrandir el RT que tenim, o bé si cal tornar enrere treient-li el darrer rectangle afegit.

L'àrea d'acceptació depèn naturalment de la forma que tingui el RT, per això representem en els diferents apartats de la figura 6 els onze models possibles de RT's -esmentats en l'apartat precedent- juntament amb la delimitació de la Θ que els pertoca. Aquestes àrees d'acceptació han estat determinades basant-se en la definició de RT de distància mínima.

Durant l'execució de l'algorisme és l'usuari, el que delimita en cada cas -per comparació amb aquests 11 tipus- quina és la seva àrea d'acceptació, i per tant si ha d'acceptar o no el rectangle que li és proposat. Aquest desenvolupament interactiu del mètode, permet que en molts casos l'usuari detecti que malgrat el respecte de l'àrea d'interès Θ, l'acceptació d'un nou rectangle suposa crear una configuració en la qual ja no hi podrà haver RT de distància mínima. Això evidentment por suposar en la pràctica, guanys de temps no genys menyspreables.

Cal destacar finalment que si bé els algorismes basats en la tècnica del backtracking -i aquest hem vist que ho està- tendeixen a fer un estudi exhaustiu de les opcions possibles, aquest cas no sol passar aquí, donat que la restricció que Θ imposa és prou forta com per eliminar ben aviat moltes de les opcions a considerar.

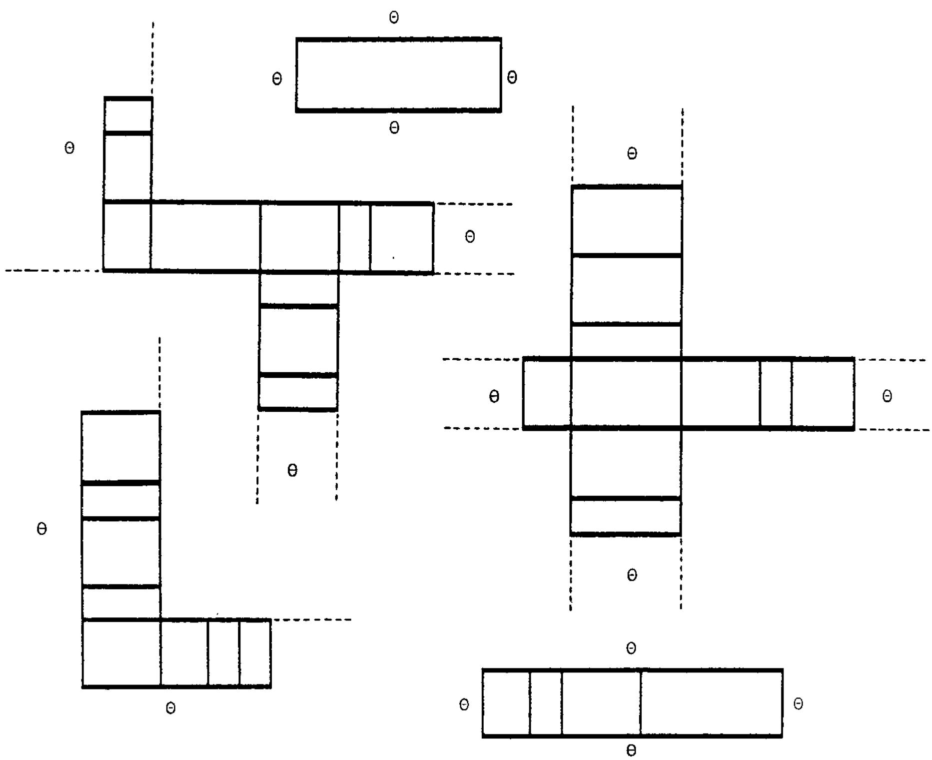

Figura 6

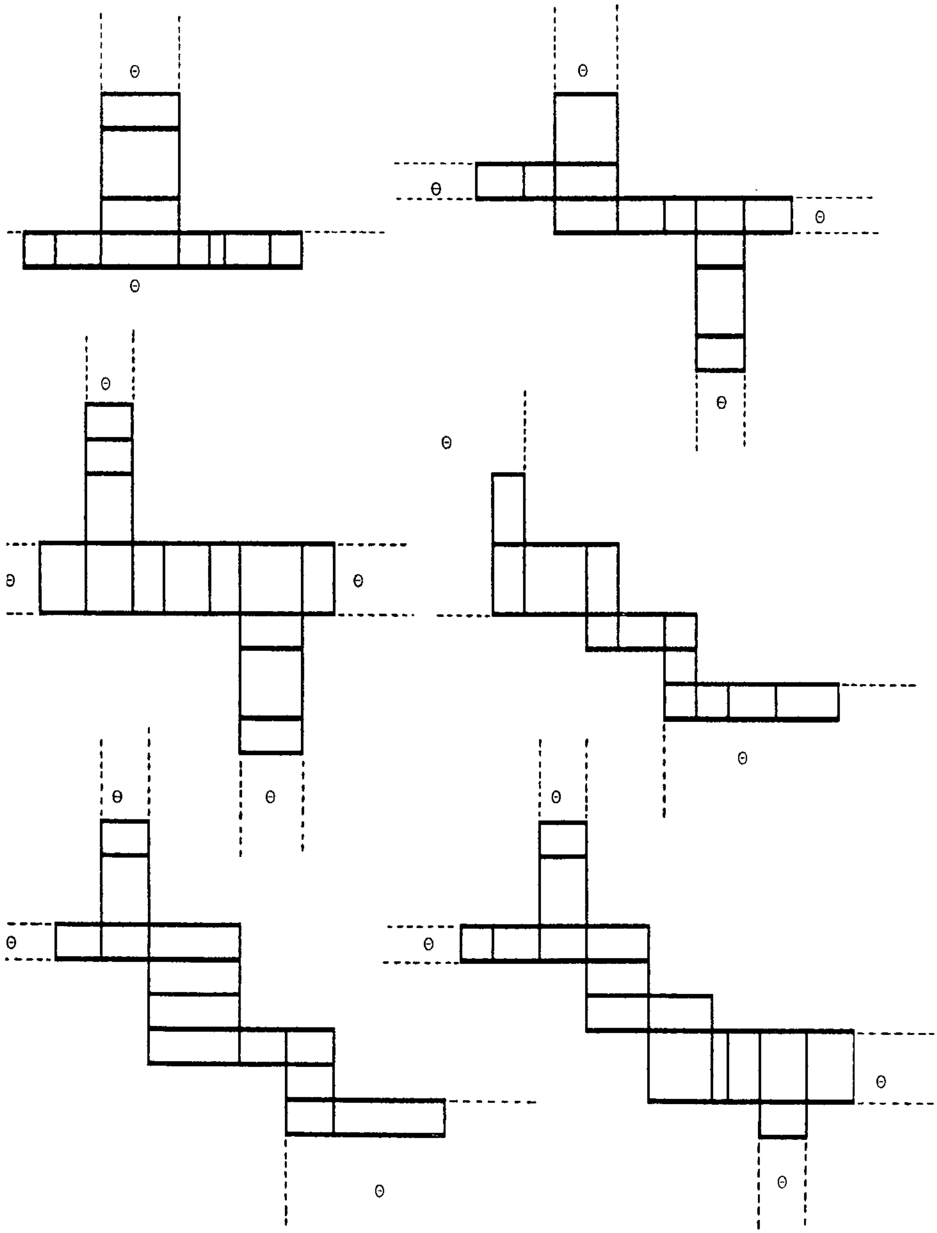

Figura 6

BIBLIOGRAFIA

[1] **Aho A.V., Garey M.R. i Hwang F.K.** "Rectilinear Steiner Trees: efficient special cases algorithms." Networks 7 pp. 37-58 1977.

[2] **Bern N.** "Two probabilistic results on Rectilinear Steiner Trees." Proc. of the 18th Annual ACM Symp. on Theory of Computing pp. 433-441 1986.

[3] **Chung F.R.K. i Graham R.L.** "On Steiner Trees for bounded point sets." Geometriae Dedicata 11 pp. 353-361 1981.

[4] **Chung F.R.K. i Hwang F.K.** "A lower bound for the Steiner Tree Problem." Journals of Siam (Appl. Math.) 34 pp. 27-36 1978.

[5] **Farley A.M., Hedetniemi S.T. i Mitchell S.L.** "Rectilinear Steiner Trees in Rectangle Trees." Journals of Siam (Alg. Discr. Meth.) 1 pp. 70-81 1980.

[6] **Garey M.R. i Johson D.S.** "The Rectilinear Steiner Problem is $NP-C$." Journals of Siam (Appl. Math.) 32 pp. 835-859 1977

[7] **Hanan M.** "On Steiner's Problem with rectilinear distances." Journals of Siam (Appl. Math.) 14 pp. 255-265 1966.

[8] **Hwang F.K.** "An O (n log n) algorithm for suboptiomal Rectilinear Steiner Trees." IEEE Circuits and Systems 26 pp. 75-77 1979.

[9] **Hwang F.K.** "On Steiner Minimal Trees with rectilinear distances." Journals of Siam (Appl. Math.) 30 pp. 104-114 1976.

[10] **Komlos J. i Shing M.T.** "Probabilistic partitioning algorithms for the Rectilinear Steiner Problem." Networks 15 pp. 413-424 1985.

[11] **Lee J.H., Bose N.K. i Hwang F.K.** "Use of Steiner's Problem in suboptimal routing in rectilinear metric". IEEE Circuits and Systems 23 pp. 470-476 1976

[12] **Provan J.S.** "Convexity and the Steiner Tree Problem." Networks 18 pp. 55-72 1988.

[13] **Servit** "Heuristic algorithms for Rectilinear Steiner Trees". Digit Processes 7 pp. 21-32 1981.

[14] **Smith J.M., Lee D.T. i Liebman J.S.** "A O(n log n) heuristic for the Rectilinear Steiner Minimal Tree Problem." Engineering Optimization 4 pp. 179-192 1980.

[15] **Wald J.A. i Colbourn C.J.** "Steiner Trees in outerplanar graphs." Cong. Numerantium 36 pp. 15-22 1982

[16] **Winter P.** "Steiner Problem in networks -a survey". Networks 17 pp. 129-167 1987.