QÜESTIIÓ, Vol 12, nº 2, pp. 209-258, 1988

CÁLCULO DEL NÚMERO MEDIO DE MÁQUINAS ACTIVAS EN UN GRUPO DE UN OPERARIO Y N MÁQUINAS, CON INCIDENCIAS POISSONIANAS Y TIEMPOS DE SERVICIO ALEATORIOS.

ALBERT COROMINAS
Universidad Politécnica de Cataluña

Este artículo expone un modelo para el cálculo del número medio de máquinas en funcionamiento en un sistema formado por un operario y N máquinas iguales, con tiempos de funcionamiento entre averías exponenciales y tiempos de servicio aleatorios, idéntica e independientemente distribuidos. El modelo generaliza las conocidas fórmulas que se obtienen a partir de los modelos $M/M/1$ con centro emisor finito y de Ashcroft, que suelen utillizarse para el problema de asignación de máquinas.

Average machine efficiency in a man-machine system with exponential time between breakdowns and random service time.

Keywords: Operator-machine assignment problem, queueing, man-machine systems.

—Albert Corominas - Universitat Politècnica de Catalunya - Dpt. d'Organització d'Empreses.
- Av. Diagonal 647- 08028 Barcelona.
—Article rebut el novembre de 1988.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de calcular el número óptimo de máquinas a cargo de un operario es uno de los que se pueden denominar clásicos, en el ámbito de la organización industrial. Como en tantos otros casos, el interés de este problema, ha resurgido al socaire de los nuevos desarrollos tecnológicos y de gestión. De hecho se trata, más en general, de determinar el número óptimo de unidades de una cierta naturaleza (máquinas) que han de estar a cargo de una unidad de otro tipo (que puede ser un operario u otra máquina).

La intervención del operario es requerida, de forma determinista o aleatoria, y su duración obedece a una determinada distribución de probabilidad (en particular, puede ser constante). Se supone que una máquina que ha requerido la intervención del operario no genera nuevas incidencias hasta que dicha intervención no ha finalizado por completo. En la terminología de la teoría de colas, se trata de sistemas con un solo canal de servicio y centro emisor finito.

El tratamiento de tales sistemas no es, en general, simple. En el supuesto de que las incidencias se produzcan exponencialmente (el tiempo transcurrido desde que se pone en marcha una máquina hasta que aparece la incidencia sigue una distribución exponencial, lo cual equivale a decir que la tasa de aparición de incidencias es constante, independiente del tiempo que la máquina lleva funcionando sin incidencias) el modelo más sencillo corresponde al caso de tiempo de servicio distribuido asimismo exponencialmente; las fórmulas obtenidas con este modelo se encuentran en cualquier texto de introducción a la teoría de las colas (por ejemplo, en [1]). Pero suele ser poco realista considerar que el tiempo de servicio se ajusta a una ley exponencial, por lo cual han sido desarrollados otros modelos, como el de Ashcroft (para tiempos de servicio constantes), con el que se obtienen fórmulas, tablas y gráficos que han sido recogidos en diversos textos (como en [2], que contiene el desarrollo del modelo). Hay otras tablas y gráficos, pero no es raro que aparezcan intercaladas en un texto sobre asignación de máquinas sin referencia alguna sobre las hipótesis en que se basan o a la forma en que han sido obtenidas, lo cual, además de desproveerlas de toda utilidad, contribuye a crear confusisón en torno a una materia, la asignación de máquinas, sobre la cual no es imposible encontrar textos no ya confusos sino simplemente erróneos.

En definitiva, aun manteniendo la hipótesis de incidencias exponenciales (lo que simplifica enormemente las cosas), no se dispone de modelos de uso rápido y cómodo para los casos en que el tiempo de servicio sigue una distribución distinta de las dos mencionadas (exponencial o constante), en los cuales hay que recurrir a la simulación o al desarrollo de modelos específicos.

En este trabajo se trata de generalizar las fórmulas de Ashcroft al caso en que, obedeciendo las incidencias a una ley exponencial, la intervención del operario (que también se denominará "reparación") sigue una ley cualquiera, independiente de una a otra reparación, con función de densidad de probabilidad $f(t)$) ($a \leq t \leq b$) y cuya esperanza matemática -que se denominará $T(1)$- es, por consiguiente:

$$T(1) = \int_a^b t f(t) dt$$

Se denominará N al número de máquinas, supuestas siempre idénticas, y λ a la tasa media de averías por unidad de tiempo de funcionamiento de una máquina.

Desde luego, este sistema ha sido ya estudiado. Por ejemplo, por Courtois y Georges (referencia [3]) para el caso de máquinas (o unidades análogas) idénticas o por Chandra y Shantikumar (referencia [4]), que tratan el caso en que existen varios tipos de máquinas, con prioridades en cuanto a la intervención de operario y con leyes de servicio exponenciales, hiperexponenciales o hipoexponenciales, lo cual en la práctica es ciertamente muy poco limitativo y, por otra parte, no parece difícil generalizar los resultados de Chandra y Shantikumar a una ley cualquiera. Los resultados de dichos autores son más generales que los presentados en este trabajo, pero precisamente por su mayor generalidad son de mucho más difícil utilización.

El enfoque aquí adoptado se basa en observar que, para determinar el número óptimo de máquinas a cargo de un operario, y con los criterios habitualmente utilizados, basta conocer el número medio de máquinas activas, sin que sea necesario calcular la probabilidad de cada uno de los posibles estados del sistema. El modelo de Chandra y Shantikumar permite calcular esta probabilidad y a partir de ella el valor medio mencionado, pero esta es una vía larga y compleja para alcanzar el resultado deseado. Dicho enfoque permite obtener fórmulas parecidas a la de Ashcroft, que se pueden calcular mediante programas sencillos, breves y de rápida ejecución

2. DESARROLLO DEL MODELO

Se considera una duración indefinida del proceso. A lo largo del tiempo se alternarán los intervalos en que el operario actúa resolviendo incidencias con intervalos de inactividad del operario, en los que todas las máquinas funcionan y no requieren su intervención; por brevedad, se denominará a dichos intervalos "activos" e "inactivos", respectivamente.

La duración media de los intervalos inactivos es $\frac{1}{N\lambda}$. Si se denomina $T(N)$ a la duración media de los intervalos activos (obsérvese que esta notación es coherente con la utilizada para designar la esperanza matemática del tiempo de reparación, $T(1)$, puesto que ésta coincide con la duración media de los intervalos activos para $N = 1$) y $A(N)$ al número medio de máquinas en funcionamiento, en régimen permanente se cunplirá que la esperanza matemática del número de averías por unidad de tiempo es igual a la media del número de reparaciones realizadas en un intervalo temporal de igual magnitud, es decir:

$$\lambda\, A\,(N) = \frac{1}{T(1)}\,(1 - p_0)$$

donde p_0 es la proporción de tiempo inactivo sobre el total, o sea:

$$p_0 = \frac{\frac{1}{N\lambda}}{\frac{1}{N\lambda} + T(N)}$$

Por lo cual:

$$A(N) = \frac{1}{\lambda T(1)} \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda N T(N)}} \tag{1}$$

A partir de $T(N)$ se puede obtener, pues, $A(N)$.

Los intervalos activos se inician con la avería de una máquina; en el instante en que el operario termina su intervención en esta primera máquina puede haberse averiado un número cualquiera, k, de las $N-1$ máquinas restàntes. Se dirá que el sistema pasa del estado $E_o(N)$ al $E_1(N)$ en el instante en que se produce la avería que interrumpe el intervalo de inactividad y que adopta el estado $E_k(N)$ en el instante en que termina la correspondiente reparación. La esperanza matemática del tiempo que transcurre desde el instante de la avería hasta el instante en que termina la reparación correspondiente es, evidentemente, $T(1)$ y la probabilidad de que el sistema adopte el estado $E_k(N)$ en este último instante es:

$$\Pi_k(N) = \int_0^\infty \binom{N-1}{k} e^{-(N-1-k)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^k f(t)dt$$

(puesto que si la duración de la reparación es t, la probabilidad de que se haya presentado incidencia o no en cada una de las $N-1$ máquinas restantes es, respectivamente $1 - e^{-\lambda t}$ y $e^{-\lambda t}$; por consiguiente, para cada valor de t, la probabilidad de que haya exactamente k máquinas averiadas entres las $N-1$ se puede calcular por medio de la ley binomial).

El cálculo de estas probabilidad no ofrece dificultades, pero se puede abreviar teniendo en cuenta que:

$$\Pi_k(N) = \alpha\Pi_{k-1}(N-1) + (1-\alpha)\Pi_k(N-1)$$

donde α es la probabilidad de avería de *una* máquina en el tiempo que transcurre mientras se repara otra; de hecho $\alpha = \Pi_1(2)$.

La actividad del operario no cesará hasta que consiga devolver el sistema al estado $E_0(N)$. Por tanto:

$$T(N) = T(1) + \sum_{k=1}^{N-1} \Pi_k(N) \tau_k(N) \tag{2}$$

donde $\Upsilon_k(N)$ es el tiempo medio para que el sistema vuelva de $E_k(N)$ a $E_0(N)$, por lo cual se cumple:

$$\Upsilon_1(*) = T(*) \tag{3}$$

Ahora bien, el sistema, en el estado $E_k(N)$ se puede considerar formado por dos subsistemas que constan, respectivamente, de $k-1$ máquinas (todas averiadas) y $N-k+1$ máquinas (una de ellas averiada y la otra en funcionamiento); si se considera que el operario se aplica a la reparación de la máquina averiada del segundo subsistema y que se mantiene en el mismo hasta que en él no queda ninguna máquina averiada, el primer subsistema no experimenta entretanto modificación alguna. El paso de $E_k(N)$ a $E_{k-1}(N)$ coincide con la transición del segundo subsistema de $E_1(N-k+1)$ a $E_o(N-k+1)$. En virtud de todo ello se puede escribir:

$$\Upsilon_k(N) = \Upsilon_1(N-k+1) + \Upsilon_{k-1}(N)$$

y, teniendo en cuenta (3):

$$\Upsilon_k(N) = \sum_{j=N-k+1}^{N} T(j)$$

de donde, por (2):

$$\begin{aligned} T(N) &= T(1) + \sum_{k=1}^{N-1} \Pi_k(N) \sum_{j=N-k+1}^{N} T(j) = \\ &= T(1) + \sum_{k=2}^{N-1} \Pi_k(N) \sum_{j+n-k+1}^{N-1} T(j) + \sum_{k=1}^{N-1} \Pi_k(N) T(N) \end{aligned}$$

o sea:

$$T(N) = \frac{1}{\Pi_0(N)} \left[T(1) + \sum_{k=2}^{N-1} \Pi_k(N) \sum_{j=N-k+1}^{N-1} . T(j) \right] =$$

$$= \frac{1}{\Pi_0(N)} \left[T(1) + \sum_{k=2}^{N-1} \Pi_k(N) \Upsilon_k'(N) \right]$$

$$\text{cos } \Upsilon_k'(N) = \sum_{j=N-k+1}^{N-1} T(j)$$

expresión que permite el cálculo recurrente de las $T(N)$ y, por tanto, a través de (1), de las $A(N)$ (y de la proporción del tiempo activo del operario sobre el total, $(1 - p_0)$ para cualquier par $\{\lambda, f(t)\}$. Los cálculos son fácilmente programables en cualquier lenguaje; la variable t se puede discretizar y ello facilita la entrada de datos así como el cálculo de las probabilidades $\pi_k(N)$, que se obtiene, entonces mediante un sumatorio. La discretización, no obstante, podría introducir errores no insignificantes; este aspecto del problema no ha sido estudiado de forma sistemática, pero como quiera que en todo caso los cáculos son rápidos es factible utilizar un número elevado de puntos y entonces las diferencias entre valores teóricos (para tiempos de reparación exponenciales o constantes) y los obtenidos a través de la discretización son muy reducidas, prácticamente despreciables.

Por supuesto, los resultados coinciden, para $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ con los que proporciona el modelo de proceso de nacimiento y muerte con un canal y centro emisor finito; si el tiempo de reparación es discreto, se ha de reemplazar la integral por un sumatorio en el cálculo de las $\pi_k(N)$ y entonces cuando $p[T(1)] = 1$ y $p(t) = 0 \forall T = T(1)$ los resultados coinciden con los del modelo de Ashcroft.

3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A título de ejemplo, en el gráfico se ha representado las diferencias relativas en los valores de $A(N)$, en el supuesto de tiempo medio de reparación igual a 1 y para dos valores distintos de N, en función de la tasa de incidencias. Ello para tiempos de reparación con distribuciones constante, exponencial y uniforme en el intervalo [0,2].

Como se puede observar en dicho gráfico, las diferencias son pequeñas para todos los valores considerados (en ningún caso llegan a alcanzar el 5%) y son menores para valores extremos (muy bajos o muy altos) de la carga del operario). Probablemente, tanto el modelo de proceso de nacimiento y muerte como el de Ashcroft son buenas aproximaciones en la mayoría de los casos reales (con incidencias exponenciales), pero el estudio general de la validez de dicha aproximación sería prolijo y la facilidad de utilización del modelo general que aquí se ha presentado no lo justifica.

4. AGRADECIMIENTO

Al profesor Ramón Companys por su atenta revisión de diversas versiones previas de este trabajo.

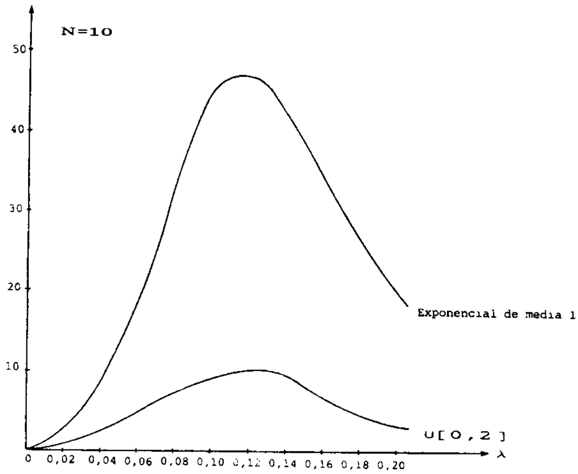
BIBLIOGRAFÍA

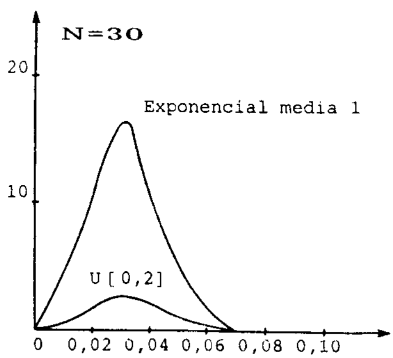
[1] **F.S. Hillier, G.J. Lieberman**, "Introducción a la Investigación de Operaciones". McGraw-Hill, 1982.

[2] **S. Eilon**, "La producción: planificación, organización y control". Labor, 1976.

[3] **P.J. Courtois, J. Georges**, "On a single-server finite queuing model with state-dependent arrival and service processes". Operation Resesarch, vol. 19, n. 2, 1971, pp. 424-435.

[4] **M.J. Chandra, J. G. Shantikumar**, "On a machine interference problem with several types of machines attended by a single repairman". International Journal of Production Research, vol. 21, n. 4, 1983, pp. 529-541.





Las curvas representan el valor de la expresión

$$\frac{A_o(N) - A_1(N)}{A_o(N)}.1000$$

donde $A_O(N)$ corresponde a tiempo de reparación constante y $A_1(N)$ a tiempo con distribución exponencial o uniforme, según el caso.