QÜESTIIÓ, Vol 12, nº 3, pp. 347-356, 1988

RECOBRIMENTS I GRAFS DISTÀNCIA-REGULARS

J. RIFÀ I COMA i J. PUJOL CAPDEVILA

Universitat Autònoma de Barcelona

Un dels aspectes claus en les Telecomunicacions està relacionat amb l'ús dels codis correctors d'errors per a la transmissió d'informació. Actualment s'utilitzen una classe molt simple de codis; la implementació física d'un codi corrector d'errors és complicada i costosa. En el camp de la Informàtica Teòrica s'intenta abordar el problema dels codis correctors d'errors des de diferents angles. Un d'ells és el de la Combinatòria Algebraica i, en particular, els Grafs Distància-Regulars, amb els quals podem construir bons codis.

A [10] es prova que partint d'un graf distància-regular Γ, e-reticular ($e \geq 3$), de valència n, podem construir, per a cada vèrtex $\alpha \in \Gamma$, una aplicació $\vartheta_\alpha : (\mathbf{Z}/2)^n \longrightarrow \Gamma$, que és un "Recobriment", tal que el conjunt $C = \vartheta_\alpha^{-1}(\alpha)$ és un codi completament regular.

A [7] K. Nomura generalitza aquest resultat pel cas no binari.

Les construccions del codi anterior i del recobriment ϑ, es basen en propietats locals del graf Γ, és a dir, no és necessari utilitzar les característiques globals de graf Distància-Regular.

En aquest article presentem els trets més importants de la teoria bàsica dels grafs Distància-Regular necessaris per construir el recobriment $\vartheta_\alpha : (\mathbf{Z}/2)^n \longrightarrow \Gamma$. També construim aquest recobriment i generalitzem el resultat de [10] en el sentit de clarificar que ϑ també és un e-recobriment, $e \geq 3$. Aquest darrer resultat és la clau en l'estudi de les propietats algebraiques dels Codis Completament-Regulars associats als Grafs Distància-Regular [11].

—J. Rifà i Coma - Dept. d'Informàtica - Fac. Ciències - Univ. Autònoma de Barcelona - 08193 Bellaterra.

—J. Pujol Capdevila - Dept. d'Informàtica - Fac. Ciències - Univ. Autònoma de Barcelona - 08193 Bellaterra.

—Article rebut el setembre de 1988.

Coverings and Distance-Regular Graphs.

Keywords: Distance-Regular Graphs, Coverings, Completely Regular Codes, e-latticed graphs.

1. INTRODUCCIÓ

Sigui $\Gamma(X, A)$ un graf connex i no dirigit de cardinalitat finita ($\#X < +\infty$).

Un *camí* de longitud r de x a y ($x, y \in X$) és una sequència de vèrtexs $x_0 = x, x_1, x_2, ..., x_{r-1}, x_r = y$ tal que cada (x_i, x_{i+1}) és una aresta de Γ.

La *distància* de x a y és la longitud mínima dels camins de x a y, denotada $\partial(x, y)$.

Si $y \in \Gamma$, $\Gamma_i(y) = \{x \in \Gamma z | \partial(x, y) = i\}$ i definim $B_r(y) = B_{r-1}(y) \cup \Gamma_r(y)$ per qualsevol $r \geq 1$ i $B_0(y) = \Gamma_0(y) = \{ y \}$

El *diàmetre* de Γ és la màxima de les distàncies entre dos qualsevols dels seus vèrtexs. Sigui ρ.

Si per a tot parell de vèrtexs $x, y \in \Gamma$ que estiguin a distància t, el nombre d'elements del conjunt $\Gamma_r(x) \cap \Gamma_s(y)$ només depèn dels enters r, s, t (no negatius) però és independent dels vèrtexs considerats, aleshores el graf Γ s'anomena *distància regular*, i els cardinals esmentats es designen per p^t_{rs}.

Sigui n la valència d'un graf distància regular,

$$n = |\Gamma_1(x)|.$$

Si Γ és un graf distància-regular de valència n la matriu $B_1 = (p^t_{1s})$ s'anomena la *matriu d'intersecció* de Γ, i (veure [1]) és una matriu tridiagonal de la forma:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & \cdots & & 0 \\ b_0 & a_1 & & \ddots & \\ & b_1 & \cdots & c_{k-1} & \\ & & & a_{k-1} & c_k \\ 0 & \ddots & \cdots & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

on $a_s = p^s_{1s}$, $b_s = p^s_{1s+1}$, $c_s = p^s_{1s-1}$.

Clarament $a_0 = 0$, $b_0 = n$, $c_1 = 1$ i $a_s + b_s + c_s = n$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & & 0 \\ n & a_1 & & \ddots & \\ & b_1 & \dots & c_{k-1} & \\ & & & a_{k-1} & c_k \\ 0 & \ddots & \dots & b_{k-1} & a_k \end{pmatrix}$$

Sigui $F = \mathbf{Z}/2$. Per a cada $n \geq 1$, anomenem F^n al F-espai vectorial de dimensió n sobre el cos F. El *pes*, $W_H(v)$, d'un vector $v \in F^n$ és el nombre de coordenades diferents de zero. La *distància* de *Hamming* entre dos vectors $v, w \in F^n$ és $\partial(v, w) = W_H(v - w)$.

Fixada una base $e_1, e_2, \dots, e_n$ de F^n representarem cada element de F^n per les seves coordenades en la base $\{e_i\}$. F^n té estructura de graf considerant com a vèrtexs els seus elements i definint dos vèrtexs adjacents si i només si la seva distància (de Hamming) és la unitat.

Per un n qualsevol, el diàmetre de F^n és n, a més a més.

$$F^n = \bigcup_{r=0}^{n} \Gamma_r(0)$$

F^n és un graf distància-regular de valència n, anomenat el Graf de Hamming, $H(n, 2)$, amb la següent matriu d'intersecció:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & & 2 \, . & & \\ & n-1 & & 0 \, . & \cdot n-1 & \\ & & & n-2. & \cdot \; 0 & n \\ 0 & \dots & & \dots & \cdot \; 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observació:

A [1], pag. 54, es pot veure que F^n és, a més a més, un esquema d'asssociació simètric de classe n anomenat l'Esquema de Hamming.

Un graf distància-regular és *e-reticular*, de valència n, si els paràmetres p^t_{1s} de la seva matriu d'intersecció, B_1, coincideixen amb els de l'esquema de Hamming per $t + s \leq 2 \cdot e - 1$. En altres paraules, un graf distància-regular és e-reticular si els seus paràmetres satisfan:

$$\begin{cases} p^t_{1s} = n - t & \text{per qualsevol } 0 \le t = s - 1 \le e - 1 \\ p^t_{1t} = 0 & \text{per qualsevol } 0 \le t = s \le e - 1 \\ p^t_{1s} = t & \text{per qualsevol } 0 \le t = s + 1 \le e \end{cases}$$

és a dir

$$(B_1)_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ n & 0 & 2\,. & & \\ & n-1 & 0\,. & \cdot\ . & \\ & & n-2 & \cdot\ . & e \\ 0 & \ldots & \ldots & n-e+1 & * \end{pmatrix}$$

on $(B_1)_e$ significa la submatriu de B_1 formada per les $e+1$ primeres files i les $e+1$ primeres columnes.

Un graf distància-regular e-recticular, de valència n, és anomenat, també, un $H(e,0,n)$−graf.

Exemples:

1. El 3-cub és un graf distància-regular 3-reticular, i la matriu d'intersecció és,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. El graf de Petersen és un graf distància-regular 1-reticular

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. RECOBRIMENTS DE HAMMING

Una aplicació $\vartheta : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ entre dos grafs és un isomorfisme, si es tracta d'una bijecció que conserva les *adjacències*, és a dir, ϑ és bijectiva i si $(x, y) \in A$ aleshores $(\vartheta(x), \vartheta(y)) \in A'$.

Una aplicació $\vartheta; \Gamma \rightarrow \Gamma'$ entre dos grafs és un *isomorfisme e-local* si ϑ indueix un isomorfisme de grafs $(r = 0, 1, ..., e-1)$ $\vartheta : B_r(x) \rightarrow B_r(\vartheta(x))$ per a cada vèrtex $x \in \Gamma$.

Observem que un isomorfisme de grafs conserva la distància, és a dir, si $\partial(x, y) = r$ aleshores $\partial(\vartheta(x), \vartheta(y)) = r$. Fixem-nos, també, que un isomorfisme e-local també és un isomorfisme r-local per a tot $0 \leq r \leq e$, i un isomorfisme de grafs $\vartheta : \Gamma_r(x) \rightarrow \Gamma_r(\vartheta(x))$ $(r = 0, 1, ..., e-1)$.

Un *e-recobriment* és un isomorfisme e-local exhaustiu.

El lemes que segueixen son conseqüència inmediata de les definicions:

LEMA 1:

Sigui $\vartheta : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un isomorfisme e-local $(e \geq 2)$ i sigui $x_0 \in \Gamma, x_0' = \vartheta(x_0)$. Si $x_0', x_1', ..., x_s'$ és un camí a Γ', aleshores existeix un camí $x_0, x_1, ..., x_2$ a Γ amb $\vartheta(x_i) = x_i'$ $(0 \leq$ i $\leq s)$.

LEMA 2:

Un isomorfisme e-local $(e \geq 2)\, \vartheta : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ és exhaustiu (i per tant e-recobriment) si Γ' és connex.

Definició:

Si $x \in \Gamma$ i Z és un subconjunt de vèrtexs del graf, $Z \subset X$, definim la distància de x a Z com,

$$\partial(x, Z) = \min \{ \partial(x, z) \mid z \in Z \}$$

LEMA 3:

Si $\vartheta : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ és un e-recobriment $(e \geq 2)$, aleshores per $x, y \in \Gamma$ i $z' \in \Gamma'$,

$$\partial(x, y) \geq \partial(\vartheta(x), \vartheta(y))$$
$$\partial(x, \vartheta^{-1}(z')) = \partial(\vartheta(x), z')$$

3. CONSTRUCCIÓ D'UN e-RECOBRIMENT SOBRE $F^n (n \geq 4)$:

Sigui Γ un $H(e,0,n)$-graf $(e \geq 3)$ connex, és a dir, Γ és un graf connex distància-regular e-reticular $(e \geq 3)$, de valència n. La matriu d'intersecció té la forma:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ n & 0 & 2 & 0 & \cdot \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \cdot \\ 0 & 0 & n-2 & * & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$p_{10}^0 = p_{11}^1 = p_{12}^2 = 0$$
$$p_{11}^0 = n \ , \ p_{12}^1 = n-1 \ , \ p_{13}^2 = n-2$$
$$p_{10}^1 = 1 \ , \ p_{11}^2 = 2 \ , \ p_{12}^3 = 3$$

o de forma equivalent,

(3.1) per qualsevol $x \in X$, $|\Gamma_1(x)| = n$

(3.2) per qualsevol $x, y \in X$:

si $\partial(x,y) = 1$ aleshores $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = 0$

(3.3) si $\partial(x,y) = 2$ aleshores $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)| = 2$

(3.4) si $\partial(x,y) = 3$ aleshores $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(y)| = 3$

(3.5) si $\partial(x,y) = 2$ aleshores $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(y)| = 0$

TEOREMA 1:

Si Γ és un $H(e,0,n)$-graf $(e \geq 3)$ connex, aleshores existeix un e-recobriment $\vartheta : F^n \to \Gamma$.

La demostració es basa en els següents lemes:

LEMA 4:

Fixat $\alpha \in \Gamma$, existeix un isomorfisme,

$$\varphi : B_2(0) \to B_2(\alpha)$$

Demostració

$B_2(0)$ està format per tots els vectors de pes menor o igual que 2, és a dir, $B_2(0) = \{0\} \cup \Gamma_1(0) \cup \Gamma_2(0)$ Definim φ de forma recurrent:

a) $\varphi(0) = \alpha$.

b) Com que $\Gamma_1(0) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ i $|\Gamma_1(\alpha)| = n$ (3.1), hi ha $n!$ formes diferents de definir φ sobre $\Gamma_1(0)$. En triem una de concreta a la que anomenarem φ.

É s clar que φ sobre $B_1(0)$ és un isomorfisme.

c) Sigui $v = e_1 + e_2 \in \Gamma_2(0)$. Aleshores $e_1, e_2 \in \Gamma_1(0)$ i per b) $x = \varphi(e_1)$ i $y = \varphi(e_2)$ amb $\partial(\alpha, y) = 1$, i $\partial(\alpha, y) = 1$, és a dir, $\partial(x, y) \leq 2$:

Si $\partial(x, y) = 0$ seria $x = y$ i per tant $e_1 = e_2$, absurd.

Si $\partial(x, y) = 1$ i $\alpha \in \Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)$, contradiria (3.2)

Per tant, $\partial(x, y) = 2$ i com que $\alpha \in \Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)$, per (3.3), existeix *un únic* $z(\neq \alpha), z \in \Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y)$. Definim $\varphi(v) = z$. És clar que $\partial(\alpha, z) = 2$.

A més a més, si $z \in \Gamma_2(\alpha)$ existeixen

$$x, y \in \Gamma_1(\alpha) \cap \Gamma_1(z) \text{ únics. Si } e_i = \varphi^{-1}(x), \quad e_j = \varphi^{-1}(y),$$

aleshores $v = e_i + e_j$ és l'únic tal que $\varphi(v) = z$. Això demostra que φ és una bijecció.

Finalment, si $u, v \in B_2(0)$ i $\partial(u, v) = 1$ volem veure que $\partial(\varphi(u), \varphi(v)) = 1$. La única possibilitat és que $u \in \Gamma_2(0)$, i $v \in \Gamma_1(0)$. Serà $v = e_i$ i $u = e_i + e_j$ i en aquestes condicions ja hem vist que $\partial(\varphi(u), \varphi(v)) = 1$.

Això completa la prova.

LEMA 5:

φ es pot extendre a una aplicació $\vartheta : F^n \to \Gamma$ tal que si $u, v \in F^n$ i $\partial(u, v) = 1$ aleshores $\partial(\vartheta(u), \vartheta(v)) = 1$.

Demostració:

Definim $\vartheta = \varphi$ per a tot $v \in B_2(0)$. Definim, de forma recurrent, ϑ a $B_r(0)$ per tot $r > 2$.

Sigui $v \in \Gamma_r(0)$, aleshores puc escriure $v = u + e_i + e_j$ amb $u \in \Gamma_{r-2}(0)$, $u + e_i, u + e_j \in \Gamma_{r-1}(0)$ i $\partial(u, u, +e_i) = \partial(u, u + e_j) = 1$ i $\partial(u + e_i, u + e_j) = 2$. Diem, $x = \vartheta(u)$, $\quad y_i = \vartheta(u+e_i)$, $y_j = \vartheta(u+e_j)$. Com que suposem que ϑ sobre $B_{r-1}(0)$ conserva la distància, $\partial(x, y_i) = \partial(x, y_j) = 1$ i per tant $\partial(y_i, y_j) \leq 2$:

Si $\partial(y_i, y_j) = 0$ aleshores, $y_i = y_j$. Agafem $w \in \Gamma_{r-3}(0)$ tal que $u = w + e_k$. Podem establir,

$$\partial(y_i, \vartheta(w + e_i)) = 1 \quad \text{i} \quad \partial(y_j, \vartheta(w + e_j)) = 1$$

però per (3.2) això només és possible si $\vartheta(w+e_i) = \vartheta(w+e_j)$, amb $W_H(w) < W_H(u)$. Continuant d'aquesta manera arribariem fins a $\vartheta(e_i) = \vartheta(e_j)$ i per tant $e_i = e_j$ que és absurd.

Si $\partial(y_i, y_j) = 1$ contradiu (3.2)

Per tant, $\partial(y_i, y_j) = 2$ i com que $x \in \Gamma_1(y_i) \cap \Gamma_1(y_j)$ (3.3) existeix un únic $z(\neq x)$, $z \in \Gamma_1(y_i) \cap \Gamma_1(y_j)$. Definim $\vartheta(v) = z$. És clar que $\partial(x, z) = 2$.

Falta demostrar que aquesta definició no depend dels particulars e_i i e_j escollits: Suposem $v = w + e_i + e_j + e_k$ amb $w \in \Gamma_{r-3}(0)$. Siguin $x = \vartheta(w)$, $y_i = \vartheta(w+e_i)$, $y_j = \vartheta(w+e_j)$, $y_k = \vartheta(w+e_k)$, $z_{ij} = \vartheta(w+e_i+e_j)$, $z_{jk} = \vartheta(w+e_j+e_k)$, $z_{ik} = \vartheta(w+e_i+e_k)$, $t_{ijk} = \vartheta(w+e_i+e_j+e_k)$ i $t_{jki} = \vartheta(w+e_j+e_k+e_i)$. A més a més, $\partial(x, y_i) = \partial(x, y_j) = d(x, y_k) = 1$,

$$\partial(y_i, y_j) = \partial(y_i, y_k) = \partial(y_j, y_k) = 2$$

$$, \quad \partial(y_i, z_{ij}) = \partial(y_i, z_{ik}) = 1$$

i de manera semblant, s'obtenen les altres relacions.

Veiem que $\partial(x, t_{ijk}) = 3$:

Ja sabem que $\partial(x, t_{ijk}) \leq 3$ ja que hi ha un camí de longitud 3 que uneix x y t_{ijk}, pero,

Si $\partial(x, t_{ijk}) = 0$, aleshores $t_{ij} \in \Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y_i)$ però $\partial(x, y_i) = 1$, que contradiu (3.2)

Si $\partial(x, t_{ijk}) = 1$, com que $\partial(x, t_{ij}) = 2$ per (3.3) seria $|\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(t_{ij})| = 2$, però $\{y_i, y_j, t_{ijk}\} \subset \Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(t_{ij})$ la qual cosa és absurda.

Si $\partial(x, t_{ijk}) = 2$ per (3.5) $|\Gamma_2(x) \cap \Gamma_1(t_{ijk})| = 0$, però el vèrtex $t_{ij} \in \Gamma_2(x) \cap \Gamma_1(t_{ijk})$, i això seria absurd.

La conclusió és que $\partial(x, t_{ijk}) = 3$.

De forma anàloga es demostra que $\partial(x, t_{jki}) = 3$; i utilitzant que $\partial(x, t_{ijk}) = 3$ i que $\partial(x, t_{jki}) = 3$ es comprova que $\partial(y_k, z_{ij}) = 3$.

Per (3.4) tindriem $|\Gamma_2(y_k) \cap \Gamma_1(z_{ij})| = 3$, però per altra banda $\{ y_i, y_j, t_{ijk}, t_{jki} \} \subset \Gamma_2(y_k) \cap \Gamma_1(z_{ij})$, i això és absurd tret que tinguem $t_{ijk} = t_{jki}$.

Finalment cal comprovar que si $u, v \in B_r(0)$ i $\partial(u, v) = 1$ aleshores $\partial(\vartheta(u), \vartheta(v)) = 1$:

Ho farem per inducció sobre r. El lema 4 demostra el resultat per $r \leq 2$. Suposarem cert el resultat fins a $r-1$ i el demostrarem per r. Suposem que $v = ue_j = w + e_i + e_j$ amb $w \in \Gamma_{r-2}(0)$, $u \in \Gamma_{r-1}(0)$ i $v \in \Gamma_r(0)$. Aleshores $\vartheta(v)$ es construeix de forma única a partir de $y_i = \vartheta(w+e_i)$ i $y_j = \vartheta(w+e_j)$ amb $\partial(y_i, \partial(v)) = \partial(y_j, \vartheta(v)) = 1$. Això prova el resultat.

Demostració del Terorema 1:

L'aplicació $\vartheta : F^n \to \Gamma$ definida en el lema 5 és un e-recobriment.

Per completar la demostració només cal veure que per qualsevol $u \in F^n$, ϑ és una bijeccció de $B_2(u)$ a $B_2(\vartheta(u))$:

En primer lloc, com a conseqüència inmediata del lema 5, és evident que existeix una bijecció entre $B_1(u)$ i $B_1(\vartheta(u))$.

Per qualsevol $z \in \Gamma_2(\vartheta(u))$ existeixen $y_1, y_2 \in \Gamma_1(\vartheta(u))$, únics, tals que les seves antiimatges són de la forma $u + e_1 = \vartheta^{-1}(y_1)$ i $u + e_2 = \vartheta^{-1}(y_2)$. El vector $u + e_1 + e_2$ és la antiimatge de z per ϑ.

Si $v, w \in B_2(u)$ com que ϑ es bijecció sobre $B_1(u)$, només cal provar la injectivitat en els següents casos:

a) $v \in \Gamma_1(u)$ i $w \in \Gamma_2(u)$. En aquest cas és evident ja que sabem que $\vartheta(v) \in \Gamma_1(\vartheta(u))$ i $\vartheta(w) \in \Gamma_2(\vartheta(u))$. (Veure la construcció del lema 5).

b) $v, w \in \Gamma_2(u)$. Suposem $v = u + e_i + e_j$ i $w = u + e_k + e_1$, aleshores $u + e_i$, $u + e_j$, $u + e_k$, $u + e_1$, $\in \Gamma_1(u)$ i per tant
$\vartheta(u+e_i)$, $\vartheta(u+e_j)$, $\vartheta(u+e_k)$, $\vartheta(u+e_1) \in \Gamma_1(\vartheta(u))$. El lema 5 construeix $\vartheta(v)$ i $\vartheta(w)$ a partir d'aquests de forma única. Si $\vartheta(v) = \vartheta(w)$, per (3.3) hauria de ser $\vartheta(u + e_i) = \vartheta(u + e_k)$ i $\vartheta(u + e_j) = \vartheta(u + e_l)$ i per tant $u + e_i = u + e_k$ i $u + e_j = u + e_1$ i que $v = w$.

Això completa la prova.

4. BIBLIOGRAFIA

[1] **Bannai, E.** and **Ito, T.** (1984). "Algebraic Combinatorics I". The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc. California.

[2] **Biggs, N.** (1971). "Finite groups of automorphisms". Cambridge Universite Press.

[3] **Delsarte, P.** (1973). "An algebraic approach to the association schemes of coding theory". Philips Research Reps. Suppl. 10.

[4] **Egawa, Y.** (1981). "Characterization of $H(n, q)$ by the parametres". J. of Combinatorial Theory (A), 31.

[5] **Enomoto, H.** (1973). "Characterization of families of finite permutation groups by the subdegrees". Uni. Tokio, Sect IA, 1-11.

[6] **Goethals, J.M.** and **Van Tilborg** (1975). "Uniformly packed codes". Philips Res. Report, 30.

[7] **Nomura, K.** "Distance-Regular Graphs of Hamming Type". *Preprint.*

[8] **Rifà, J.** (1987). "Equivalències entre estructures combinatòricament regulars: Codis, Esquemes i grafs:" Tesi Doctoral. Univ. Autònoma de Barcelona.

[9] **Rifà, J.** and **Huguet, L.** (1988). "Characterization of Completely Regular Codes Throug P-Polynomial Association Schemes". Springer-Verlag, LNCS, n. 307, 157-167.

[10] **Rifà, J.** and **Huguet, L.** "Clasification of a Class of Distance-Regular Graphs via Completely Regular Codes". To appear in Discrete Maths.

[11] **Rifà, J.** "Distance-Regular Graphs and Propelinear codes". Submitted to Discrete Maths.