QÜESTIIÓ, Vol 18, 2 pp. 189-208, 1994

CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD EN PROGRAMACIÓN SEMI-INFINITA LINEAL: CUALIFICACIONES DE RESTRICCIONES Y PROPIEDADES DEL CONJUNTO POSIBLE

TERESA LEÓN y ENRIQUETA VERCHER

Universitat de València

En este trabajo se establece una caracterización de las soluciones óptimas para el problema continuo de Programación Semi-Infinita Lineal, donde el conjunto de índices es un compacto de $\mathbb{R}^p$. *Para la demostración de la condición necesaria de optimalidad se ha utilizado una extensión de la cualificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz. Hemos probado que dicha cualificación es imprescindible para asegurar que no hay desigualdades inestables en el conjunto posible y para que existan puntos extremos no degenerados. Se estudian asimismo otras cualificaciones y su relación con aquélla. Incluimos numerosos ejemplos que clarifican esas relaciones.*

Necessary optimality conditions in Semi-Infinite Linear Programming: constraint qualifications and properties of the feasible set.

Key words: Semi-Infinite Programming, Constraint qualifications, Structure of the feasible set, Optimality conditions.

Teresa León y Enriqueta Vercher. Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València.

–Article rebut el juliol de 1992.

–Acceptat el desembre de 1993.

1. INTRODUCCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos el problema continuo de Programación Semi-Infinita Lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(PSI1)} & \text{Min } c^T x \\
& \text{s.a. } a^T(s)x \geq b(s) \quad s \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

donde el conjunto $\mathcal{S}$ es un compacto de $\mathbb{R}^p$ y las componentes $a_1, \ldots, a_n$ de la función a y la función b son continuas en $\mathcal{S}$. F denota el conjunto de soluciones posibles de (PSI1) y $v(P)$ su valor óptimo. Una de las aplicaciones clásicas del problema (PSI1) se da en la Teoría de la Aproximación, aunque muchos otros problemas pueden ser formulados también de ese modo.

En la Sección 3 hemos establecido una condición necesaria de optimalidad de tipo Kuhn-Tucker para el problema (PSI1), con una condición de regularidad que es una extensión de la cualificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz (CRMF). Dicha condición es también esencial en el estudio de algunas características del conjunto posible.

En la Sección 2 se ha comprobado que, al igual que ocurre en PL finita, los candidatos a óptimo son puntos posibles con alguna restricción activa. Además, para un conjunto posible no necesariamente compacto, hemos estudiado cómo afecta a su estabilidad el hecho de que el vector nulo sea un elemento del conjunto de los gradientes activos o de su envoltura convexa. La estabilidad de todas las desigualdades que definen el conjunto posible es también una propiedad de los problemas que satisfacen la cualificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz.

En la Sección 4 hemos comparado la CRMF con algunas de las cualificaciones que han sido establecidas en PSI lineal y convexa. Hemos demostrado que para una amplia clase de problemas de PSI lineal no es necesario verificar ninguna cualificación de restricciones —por ejemplo, aquellos que tengan al menos un punto extremo no degenerado— ya que satisfacen trivialmente la condición de Mangasarian-Fromovitz. Por otra parte, cuando en un problema no se satisface esa condición todos los puntos extremos son degenerados, lo que puede complicar considerablemente la resolución numérica del mismo. Hemos estudiado también otras cualificaciones más débiles que permiten caracterizar las soluciones óptimas aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de PSI lineal.

Podemos escribir el problema (PSI1) en forma estándar introduciendo la función de holgura $z(s)$:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(PSI2)} & \text{Min } c^T x & & & \\
& \text{s.a. } a^T(s)x & - \; z(s) = b(s) & s \in \mathcal{S} \\
& x \in \mathbb{R}^n & \quad\; z(s) \geq 0 & s \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Nótese que z es una función continua sobre $\mathcal{S}$, i.e. $z \in \mathbb{C}[\mathcal{S}]$. Supondremos a lo largo de todo el trabajo que $F \neq \emptyset$. Dado un punto $x^* \in F$ y su función de holgura $z^*(s)$, el par $(x^*; z^*)$ es una solución posible del problema (PSI2). Denotaremos por $\text{constr}(x^*) = \{s \in \mathcal{S}: a^T(s)x^* = b(s)\} = \{s \in \mathcal{S}: z^*(s) = 0\}$ y por $A(x^*) = \{a(s): s \in \text{constr}(x^*)\}$ los conjuntos de restricciones y gradientes activos en x^*, respectivamente.

En Nash (85) se dan las siguientes definiciones para las soluciones posibles del problema (PSI2). Sea $(x; z)$ una *solución posible*, se dice que es *básica* si se satisface que $B((x; z)) \cap N(A) = \{\theta\}$, siendo $N(A) = \{(d; h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}]: h(s) = a^T(s)d$ para todo $s \in \mathcal{S}\}$, $B((x; z)) = \{(d; h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}]:$ existe $\lambda > 0$ tal que $(x+\lambda d; z+\lambda h) \in X_+$ y $(x-\lambda d; z-\lambda h) \in X_+\}$, $X_+ = \{(y; f) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}]: f(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}\}$ y donde θ es el elemento nulo de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}]$. Además, una *solución posible básica* $(x; z)$ es *no degenerada* si $B((x; z)) \oplus N(A) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}]$.

Un problema dual para el problema (PSI1) es (ver p.e. Charnes, Cooper y Kortanek (63)):

$$
\begin{array}{ll}
(\text{PSI1}^*) & \text{Max } \sum_{s \in \mathcal{S}} \lambda(s) b(s) \\
& \text{s.a. } \sum_{s \in \mathcal{S}} \lambda(s) a(s) = c \\
& \lambda \in \mathbb{R}_+^{(S)}
\end{array}
$$

donde $\mathbb{R}_+^{(S)}$ es el cono convexo de las sucesiones finitas generalizadas no negativas: $\mathbb{R}_+^{(S)} = \{\alpha: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+ / \alpha(s) = 0$ para todo s excepto para un número finito$\}$.

2. ESTABILIDAD EN EL CONJUNTO POSIBLE

Veremos que solo son candidatos a óptimo aquellos puntos posibles para (PSI2) que tienen alguna restricción activa y estudiaremos las características del conjunto posible cuando, para alguna solución $x \in F$, el vector nulo es un gradiente activo o un elemento de la envoltura convexa de $A(x)$, que denotaremos por $\text{co}(A(x))$.

Lema 2.1

Sea $(x; z)$ un punto posible para (PSI2). Si $\text{constr}(x) = \emptyset$, entonces $x \in \text{int}(F)$.

Demostración

Veamos que existe $\lambda > 0$ tal que la bola abierta $B(x, \lambda) \subseteq F$. Por hipótesis $\text{constr}(x) = \emptyset$, luego $z(s) > 0$ para todo $s \in \mathcal{S}$. Por compacidad de $\mathcal{S}$, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que la función continua $z(s) > \epsilon$ en $\mathcal{S}$. Sea $d \in \mathbb{R}^n$, distinguimos dos situaciones:

(1) Si $a^T(s)d \geq 0 \; \forall s \in \mathcal{S}$, entonces $\overline{x} = x + \lambda d \in F$ para cualquier $\lambda > 0$.

(2) Si para d existe algún s tal que $a^T(s)d < 0$, definimos $\varphi(d) = \max\{-a^T(s) d : s \in \mathcal{S}\}$, $\varphi(d) > 0$. Sea $\varphi = \sup \varphi(d) > 0$. Sea $\gamma(d) = \inf\{-z(s)/a^T(s)d\colon s \in \mathcal{S}, a^T(s)d < 0\} \geq 0$, veamos que $\gamma(d) > 0$. Como para cualquier $s \in \text{constr}(x)$ tal que $a^T(s)d < 0$ se tiene que $-(z(s)/a^T(s)d) > -\epsilon/a^T(s)d \geq \epsilon/\varphi(d) \geq \epsilon/\varphi$, entonces $\gamma(d) \geq \epsilon/\varphi > 0$. Así, pues, definiendo $\lambda = \epsilon/2\varphi$, por construcción $x + \lambda d \in F$.

Entonces, $B(x, \lambda) \subseteq F$.

■

Nota. De hecho, sí existe una solución posible x de (PSI1) tal que $\text{constr}(x) = \emptyset$, en Goberna y López (88) se prueba que $\dim F = n$ y que $\text{int } F = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a^T(s)x > b(s)$ para todo $s \in \mathcal{S}\}$. Además, el hecho de que $\text{int } F \neq \emptyset$ permite asegurar que el interior algebraico $\text{cor } F = \text{int } F$ (véase, p.e. Holmes (75)).

El recíproco del Lema 2.1 no es cierto, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } x_1 + x_2 & \\ \text{s.a. } sx_1 + s^2 x_2 \geq 0 & s \in [0, 1] \end{array}$$

Es fácil comprobar que: $F = \{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 0\}$. Sea $\overline{x} = (1, 1)' \in \text{int}(F)$, tenemos que $\text{constr}(\overline{x}) = \{0\} \neq \emptyset$ siendo $a(0) = 0_2$.

Ahora bien, esta situación es "única", es decir, si $x \in \text{int}(F)$ y $\text{constr}(x) \neq \emptyset$, entonces necesariamente $A(x) = \{0_n\}$. En otro caso, tomando $d = a(s)$ para $s \in \text{constr}(x)$ y para cualquier valor positivo de λ se tendría que $x + \lambda d \notin F$, lo que contradice que $x \in \text{int}(F)$.

Corolario 2.1.1

Sea $x \in F$ tal que $\text{constr}(x) = \emptyset$, entonces x no es un mínimo.

Dado que los puntos que no tienen restricciones activas no pueden ser soluciones óptimas del (PSI1), en lo que sigue consideraremos soluciones posibles cuyo $\operatorname{constr}(x) \neq \emptyset$.

Ya hemos visto que 0_n es el único gradiente activo posible para los puntos de $\operatorname{int}(F)$. En el ejemplo anterior puede, además, comprobarse que $0_n \in A(x^*)$ para todas las soluciones óptimas x^*, que tenían otros gradientes activos. También podemos encontrar problemas cuyas soluciones óptimas tengan al vector nulo como único gradiente activo:

Ejemplo 2.1 (pp. 31 en GLASHOFF y GUSTAFSON (83))

$$\begin{array}{ll} (P_1) & \text{Min } x_1 \\ & \text{s.a. } sx_1 + s^2x_2 \geq s^2 \qquad s \in [0,1] \end{array}$$

Sea $\overline{x} = (0,2)' \in F$, $z(s) = s^2$ $s \in [0,1]$, $\operatorname{constr}(\overline{x}) = \{0\}$ y se tiene que $A(\overline{x}) = \{0_2\}$. Es fácil ver que $v(P_1) = 0$, luego $\overline{x}$ es óptimo para (P_1).

De hecho, si un punto posible tiene al vector nulo como uno de sus gradientes activos, entonces todas las demás soluciones lo tendrán como gradiente activo.

Lema 2.2

Si existe un $\overline{s} \in \mathcal{S}$ tal que $a(\overline{s}) = 0_n$, entonces o $\overline{s} \in \operatorname{constr}(x)$, para todo $x \in F$, o $\overline{s} \notin \operatorname{constr}(x)$, para ningún $x \in F$.

Demostración

Sea x una solución posible cualquiera, su función de holgura será $z(s) = a^T(s)x - b(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathcal{S}$. En particular se tiene que $z(\overline{s}) = -b(\overline{s}) \geq 0$. Así que:

(i) $b(\overline{s}) = 0 = z(\overline{s})$, y $\overline{s} \in \operatorname{constr}(x)$, o

(ii) $b(\overline{s}) < 0$ y $z(\overline{s}) > 0$, con lo que $\overline{s} \notin \operatorname{constr}(x)$.

■

Nota. Según Eckhardt (75) la *desigualdad* $a^T(s^*)x \geq b(s^*)$ *es inestable en* F si para todo $x \in F$ se tiene que $a^T(s^*)x = b(s^*)$. Es decir, si $s^* \in \operatorname{constr}(x)$, para todo $x \in F$.

Cuando para un cierto $x_0 \in F$ se satisface la condición $0_n \in A(x_0)$, tenemos que existe $s_0 \in \operatorname{constr}(x_0)$ tal que simultáneamente $a(s_0) = 0_n$ y $z(s_0) =$

$a^T(s_0)x_0 - b(s_0) = 0$, luego también $b(s_0) = 0$. Del lema anterior se sigue que la desigualdad $a^T(s_0)x \geq b(s_0)$ es inestable en F. El recíproco no es cierto (véase Ejemplo 2.3).

En el Ejemplo 2.1 la desigualdad inestable está asociada a $s_0 = 0$, y es una desigualdad trivial, pero esa restricción no puede suprimirse ya que perderíamos la compacidad de $\mathcal{S}$. Podríamos plantearnos redefinir el conjunto posible, pero en general eso no es sencillo ni aconsejable.

Ejemplo 2.2

(P_2) Min $x_1 + (1/2)x_2 + (1/3)x_3$

s.a. $(s_2^2+s_1)x_1+(s_1s_2-s_2^2)x_2+(s_1s_2+s_2^2+s_2)x_3 \geq 2s_1s_2-s_1^2 \quad s \in [0,1]\times[0,1]$

Sea $x = (1,0,0)'$ una solución posible cuyo $z(s_1,s_2) = s_1+(s_2-s_1)^2$, $\text{constr}(x) = \{0_2\}$ y $A(x) = \{0_3\}$. De nuevo tenemos una desigualdad que corresponde a $s_0 = 0_2$, que no podemos eliminar. En este caso, la discusión sobre la optimalidad de las soluciones puede ser bastante más difícil, como se verá en las siguientes secciones.

Otra situación interesante es la de que $0_n \in \text{co}(\mathcal{A}(x))$ —veremos más adelante que la negación de esta condición es una cualificación de restricciones para el (PSI1)—. De nuevo, si para una solución posible x se tiene que $0_n \in \text{co}(A(x))$, entonces todos los puntos de F verifican esta condición, que es equivalente a la existencia de desigualdades inestables en el conjunto posible. Para demostrar esos resultados haremos uso del lema siguiente.

Lema 2.3

Sea $(x;z)$ un punto posible para el (PSI2) cuyo $\text{constr}(x) \neq \emptyset$, entonces $\text{co}(A(x))$ es un conjunto compacto.

Demostración

El conjunto de índices activos $\text{constr}(x)$ es cerrado, pues es la antiimagen mediante una función continua de un cerrado: $\text{constr}(x) = \{s \in \mathcal{S} \colon z(s) = 0\} = z^{-1}(\{0\})$. Además, $\text{constr}(x)$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$, compacto, luego $\text{constr}(x)$ es compacto.

Dado que la función a es continua, el conjunto de los gradientes activos $A(x) = a(\{\text{constr}(x)\})$ será un compacto y, en consecuencia, $\text{co}\{A(x)\}$ es un compacto.

■

Teorema 2.4

Si existe una solución posible x^* de (PSI1) tal que $0_n \in \text{co}(A(x^*))$, entonces cualquier otra solución posible satisface que $0_n \in \text{co}(A(x))$.

Demostración

Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $x \in F$ tal que $0_n \notin \text{co}(A(x))$, dicha condición es equivalente a que exista $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $a(s)^T d > 0$ para todo $s \in \text{constr}(x)$, pues $\text{co}(A(x))$ es cerrado (Lema 3.7 en López y Vercher (83)).

Definimos $x^1 = x + \mu d$, su función de holgura es $z^1(s) = z(s) + \mu a^T(s)d$. Para $s \in \text{constr}(x)$ tenemos que $z^1(s) > 0$ para todo $\mu > 0$. Por continuidad, $a(\cdot)^T d$ está acotado en $\mathcal{S}$, y como $z(s) > 0$ para $s \notin \text{constr}(x)$, tomando $\mu > 0$ suficientemente pequeño, llegamos a que $z^1(s) > 0$.

Sea $d^1 = x^1 - x^*$, entonces $a^T(s)d^1 = a^T(s)x^1 - b(s) = z^1(s) > 0$ en $\mathcal{S}$. En particular, hemos encontrado una dirección d^1 en la que $a^T(s)d^1 > 0$, para $s \in \text{constr}(x^*)$. Por tanto, $0_n \notin \text{co}(A(x^*))$, lo que contradice la hipótesis.

■

Teorema 2.5

Si existe una solución posible x^* de (PSI1) tal que $0_n \in \text{co}(A(x^*))$, entonces existe una desigualdad inestable en el sistema de restricciones. El recíproco también es cierto.

Demostración

Si $0_n \in \text{co}(A(x^*))$ existirán $\lambda_i > 0$ con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, tales que $0_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i a(s_i)$, para $s_i \in \text{constr}(x^*)$, $i = 1, \ldots, m$. Tomemos $a(s_1) = -(1/\lambda_1) \sum_{i=2}^m \lambda_i a(s_i)$ y veamos que $a^T(s_1)x = b(s_1)$ para todo $x \in F$, i.e. que s_1 es inestable. Por reducción al absurdo, si existe una solución posible x tal que $a^T(s_1)x > b(s_1)$, entonces

$$b(s_1) < a^T(s_1)x = -(1/\lambda_1)\sum_{i=2}^{m}\lambda_i a^T(s_i)x \leq -(1/\lambda_1)\sum_{i=2}^{m}\lambda_i b(s_i) = b(s_1),$$

pues $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b(s_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^T(s_i)x = 0$.

Recíprocamente, sea s^* tal que $a^T(s^*)x = b(s^*)$ para todo $x \in F$. Si existe cualquier solución posible x tal que $0_n \notin$ co$(A(x))$, siguiendo el razonamiento del Teorema 2.4, podemos construir un punto x^1 cuya función de holgura sea $z^1(s) > 0$ en $\mathcal{S}$, luego $a^T(s^*)x^1 > b(s^*)$. Por lo tanto, $0_n \in$ co$(A(x))$ para cualquier solución posible x.

■

Veamos algunos ejemplos en los que quedan reflejados los resultados anteriores:

Ejemplo 2.3

Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} (P_3) & \text{Min } x_1 \\ & \text{s.a. } (s-1)x_1 + s(s-2)x_2 \geq 2s(2-s)^2 \quad s \in [0.2] \end{array}$$

Es fácil ver que $F = \{(0,\delta)' \colon \delta \leq -4\}$ y que F coincide con el conjunto de soluciones óptimas, aunque solo la solución $\tilde{x} = (0,-4)'$ es un punto extremo. Consideremos $x(\delta) = (0,\delta)'$ con $\delta \leq -4$, entonces $z(\delta) = (\delta + 4 - 2s)s(s-2) \geq 0$, constr$(x(\delta)) = \{0,2\}$ y co$(A(x(\delta))) = \{x \colon -1 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 0\}$.

Tenemos, pues, dos desigualdades inestables correspondientes a los índices $\{0,2\}$. Además, co$(A(x))$ contiene el vector nulo para cada solución óptima, aunque $\{0_2\}$ no es un gradiente activo.

El dual asociado (PSI1*) tiene como soluciones posibles (y óptimas) las siguientes: $\lambda(2) = \alpha$, $\lambda(0) = \alpha - 1$, $\alpha \geq 1$, $\lambda(s) = 0$ para $s \in (0,2)$. Nótese que los índices correspondientes a las desigualdades inestables son los que caracterizan las soluciones del problema dual. Así, pues, la eliminación de las restricciones asociadas con $s = 0$ y $s = 2$ mantiene inalterado el conjunto posible F, pero convierte en inconsistente el problema dual.

Ejemplo 2.4

Consideremos el problema

(P_4) Min $x_1 + (1/2)x_2 + (1/3)x_3$

s.a. $(s_1 + s_2^2 + 1)x_1 + (s_1 s_2 - s_2^2)x_2 + (s_1 s_2 + s_2^2 + s_2)x_3 \geq 1 \quad s \in [0,1] \times [0,1]$

Sea $x_o = (1, -1, 1)'$, cuya función de holgura es $z_o(s) = s_1 + 3s_2^2 + s_2$, constr$(x_o) = \{0_2\}$, siendo $a(0_2) = (1, 0, 0)'$. Como consecuencia del Teorema 2.4, podemos afirmar que $0_3 \notin$ co$(A(x))$ para cualquier solución posible de (P_4).

3. UN TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE ÓPTIMO

La teoría de Kuhn y Tucker ha dado muy buenos resultados en el estudio de la optimalidad en PSI convexa diferenciables (véase p.e. Goberna *et al.* (81), Hettich y Zencke (82)). Es bien sabido que las condiciones necesarias exigen introducir una condición de regularidad sobre las restricciones, salvo en el caso finito lineal. Presentamos en esta sección una condición necesaria de optimalidad de tipo Kuhn-Tucker para el problema (PSI2) basada en una extensión de la cualificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz.

Definición 3.1

Sea $(x; z)$ un punto posible para el (PSI2) tal que constr$(x) \neq \emptyset$. Diremos que x satisface la *cualificación de restricciones de Mangarasian-Fromovitz (CRMF)* si existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $a(s)^T d > 0$ para todo $s \in$ constr(x).

La condición anterior es una cualificación de restricciones "local" para los problemas de programación semi-infinita lineal y permite asegurar que podemos movernos partiendo de una solución x a lo largo de una dirección d sin perder la factibilidad. Además, ya hemos visto en la demostración del Teorema 2.4 que la cualificación de Mangasarian-Fromovitz es equivalente a la condición $0_n \notin$ co$(A(x))$. Si card(constr(x)) es finito la equivalencia se sigue del Teorema de alternativa de Gordan y, en ese caso, dicha condición puede ser fácilmente comprobada resolviendo un PL.

Teorema 3.1

Sea $(x; z)$ un punto posible para el (PSI2) cuyo constr$(x) \neq \emptyset$, y supongamos que verifica la cualificación CRMF. Entonces $(x; z)$ es óptimo para el (PSI2) si y sólo si existen un subconjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ de constr(x) y unos escalares $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ tales que $c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a(s_i)$.

Demostración

Sea x una solución posible para (PSI1) cuya función de holgura es $z(s) = a^T(s)x - b(s)$. Si suponemos que $c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a(s_i)$, para $\lambda_i \geq 0$ y $s_i \in$ constr(x) $i = 1, \ldots, m$, entonces $\{s_1, s_2, \ldots, s_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ es una solución posible para el (PSI1*) y $\lambda_i(a^T(s_i)x - b(s_i)) = \lambda_i z(s_i) = 0 \quad i = 1, \ldots, m$. Del Teorema de Holgura Complementaria (Glashoff-Gustafson (83)) se sigue que x es solución óptima para (PSI1) y $\{s_1, s_2, \ldots, s_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ solución óptima para (PSI1*).

Recíprocamente, co$(A(x))$ es un compacto que no contiene a 0_n, por hipótesis, luego el cono convexo generado por el conjunto $A(x)$, $K\{A(x)\}$, es un cerrado (Corolario 9.6.1 en Rockafellar (70)). Además, por la CRMF existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $a(s)^T d > 0$ para todo $s \in$ constr(x).

Supongamos que $c \notin K\{A(x)\} = \text{cl}K\{A(x)\}$, y veamos que eso contradice que x sea solución óptima de (PSI1). Por el Teorema de Farkas generalizado (Goberna *et al.* (84)) existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $a(s)^T u \geq 0$ para todo $s \in$ constr(x) y $c^T u < 0$. Definimos $y = u + \gamma d$. Para $\gamma > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $c^T y < 0$ y que $a(s)^T y > 0$, para todo $s \in$ constr(x).

Sea $z(s)$ la función de holgura de x, definimos $\mu = \inf\{-z(s)/a^T(s)y$, para $s \in \mathcal{S}$ tales que $a^T(s)y < 0\}$, $\mu \geq 0$. Veamos que $\mu > 0$ por reducción al absurdo. Supongamos que $\mu = 0$, entonces, para $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $j \geq K$, existirá $t_j \in \mathcal{S}$, tal que $-(z(s_j)/a^T(s_j)y) < 1/j$, siendo $a^T(s_j)y < 0$. Realmente, como $a^T(\cdot)y$ es una función continua y acotada en el compacto $\mathcal{S}$, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $z(t_j) < 1/j$. Entonces existirá una subsucesión $\{t_{jk}\}_{k\geq 1}$ en $\mathcal{S}$ convergente a $t^o \in \mathcal{S}$. Por continuidad de $z(s)$ y $a(s)$:

(i) $z(t^o) = \lim z(t_{jk}) = 0$, por tanto $t^o \in$ constr(x),

(ii) $a^T(t^o)y = \lim a^T(t_{jk})y \leq 0$.

Llegamos a una contradicción, puesto que $a(s)^T y > 0$, para todo $s \in$ constr(x). Luego, necesariamente $\mu > 0$.

Sea $x_1 = x + \mu y$, por construcción $x_1 \in F$ y $c^T x_1 < c^T x$. Por tanto, x no es una solución óptima.

■

Nota. Tal como acabamos de ver, con la condición de Mangasarian-Fromovitz se asegura que $K\{A(x)\}$ es cerrado, aun con infinitas restricciones activas, lo que cuando $v(P)$ es finito permite afirmar que el dual tiene solución, no habiendo fallo de dualidad (Teorema 10.19 en Glashoff y Gustafson (83)). Estos autores utilizan como condición de regularidad que el cono de los momentos $K\{[a^T(s), b(s)]': s \in \mathcal{S}\}$ sea cerrado, lo que para nuestro problema es una implicación de la CRMF.

Cuando un punto posible satisface la CRMF y tiene un número finito de restricciones activas la aplicación del anterior teorema permite contrastar la optimalidad de una solución posible mediante la resolución de un problema lineal finito (León y Vercher (92)).

En general no es sencillo comprobar si 0_n pertenece o no a la envoltura convexa de un conjunto infinito de vectores, aunque verificar la CRMF en esos casos puede ser innecesario si se ha comprobado la condición $0_n \notin \text{co}(A(x))$ en otro punto posible. En el ejemplo siguiente comprobamos que se verifica la cualificación de restricciones sobre una solución posible no óptima.

Ejemplo 3.1

Sea

$$(P_5) \quad \begin{array}{l} \text{Min } x_1 + (1/2)x_2 + (1/3)x_3 \\ \text{s.a. } s_1x_1 + s_2x_2 + x_3 \geq s_1^2 + s_2 \quad s \in [0,1] \times [0,1] \end{array}$$

Consideremos la solución posible $x = (1,1,0)'$ cuyos $z(s_1, s_2) = s_1 - s_1^2$ y $\text{constr}(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s_2 \end{pmatrix} : s_2 \in [0,1] \right\}$. Dado que la última componente de cualquier vector $a(s)$ es igual a 1, puede comprobarse fácilmente que $0_3 \notin \text{co}\{(A(x)\}$, donde $A(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s_2 \\ 1 \end{pmatrix} : s_2 \in [0,1] \right\}$. Además, se tiene que $c = (1, 1/2, 1/3)' \notin K\{A(x)\}$ y, por tanto, x no es solución óptima.

Nota. Cuando la función $b(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathcal{S}$, la no acotación del problema semi-infinito lineal puede ser fácilmente detectada.

Lema 3.2

Supongamos un problema (PSI1) tal que $b(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}$. Sea x una solución posible, si $c^T x < 0$, entonces el problema es no acotado.

Demostración

Dado que x es una solución posible $a(s)^T x \geq b(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathcal{S}$, luego x es una dirección de recesión de F y la función objetivo disminuye estrictamente a lo largo de esa dirección. Por consiguiente, el problema no está acotado.

■

Volviendo al Ejemplo 3.1, consideremos ahora la solución posible $x = (-3/2, 1, 5/2)'$ con función de holgura $z(s_1, s_2) = -(3/2)s_1 + 5/2 - s_1^2$ y constr$(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ s_2 \end{pmatrix} : s_2 \in [0,1] \right\}$, siendo $c^T x = -1/6 < 0$. Del lema anterior se sigue que el problema primal (P_5) es no acotado. Puede comprobarse fácilmente que su dual es inconsistente.

Para el Ejemplo 2.4, donde $b(s) = 1$, se comprueba la no acotación de (P_4) tomando $x = (1.1, -2, -1/3)'$. En ese punto $z(s_1, s_2) = 1/10 + 83/30 s_2^2 - 1/3 s_2 - 7/3 s_1 s_2 + 11/10 s_1$ y se puede comprobar que $z(s_1, s_2) > 0$ en $[0,1] \times [0,1]$. Además $c^T x = -1/90 < 0$.

4. OTRAS CONDICIONES DE REGULARIDAD

Para caracterizar las soluciones óptimas de los problemas que no satisfacen la condición de Mangasarian-Fromovitz necesitamos utilizar alguna cualificación más débil. Hemos llevado a cabo un estudio comparativo de la CRMF y algunas de las condiciones que han sido utilizadas en PSI convexa.

Cuando $\mathcal{S}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$ y las funciones a y b son analíticas, Anderson y Lewis (89) establecen una caracterización de optimalidad para puntos extremos no degenerados del problema (PSI2). Veamos que la condición de no degeneración implica la CRMF, también para cualquier subconjunto $\mathcal{S}$ compacto de $\mathbb{R}^p$, con $p > 1$.

Teorema 4.1

Sea $(x; z)$ una solución posible para el (PSI2), tal que constr$(x) \neq \emptyset$. Si $(x; z)$ es un punto extremo no degenerado entonces se satisface la CRMF.

Demostración

Sea $(x; z)$ un punto extremo no degenerado de (PSI2), entonces se cumplirá que: $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}] = B((x; z)) \oplus N(A)$.

Sea $(d; h) \in B((x; z))$, entonces $(z + \lambda h)(s) \geq 0$ y $(z - \lambda h)(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}$. Para $s \in$ constr(x) tenemos que $z(s) = 0$, entonces $\lambda h(s) \geq 0$ y $-\lambda h(s) \geq 0$, para todo $\lambda > 0$. En consecuencia, $h(s) = 0$ para $s \in$ constr(x).

Sean $p \in \mathbb{R}^n$ y M constante positiva tales que $(p; M) \in X$. Entonces existirá $(d; h) \in B((x; z))$ tal que $(p - d; M - h) \in N(A)$, con lo que $a^T(s)(p - d) = M - h(s)$, para todo $s \in \mathcal{S}$. En particular, para $s \in$ constr(x): $a^T(s)(p-d) = M > 0$. Luego existe una dirección $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $a^T(s)u > 0$, para $s \in$ constr(x).

■

Nota. En consecuencia, aquellos problemas que no satisfacen la CRMF solo tienen puntos extremos degenerados, lo que dificultará su resolución mediante cualquier método primal tipo-simplex. El recíproco no es cierto (véase Ejemplo 4.1).

Cuando tenemos una solución posible con un número finito de restricciones activas podemos utilizar la caracterización que han establecido Anderson y Lewis (89) de punto extremo no degenerado. Dicha caracterización implica que los gradientes activos son linealmente independientes y, en ese caso, la demostración del anterior resultado es obvia. Pero, para aquellos puntos $x \in F$ tales que $A(x) \neq \emptyset$ y card(constr$(x) \leq n$, la CRMF no implica que los vectores de $A(x)$ sean linealmente independientes. Veamoslo:

Ejemplo 4.1

$$
\begin{array}{ll}
(P_6) & \text{Min } x_1 + (1/2)x_2 \\
 & \text{s.a. } x_1 + s^2 x_2 \geq 0 \quad s \in [-1, 1]
\end{array}
$$

Sea $x = (2, -2)'$ cuya función de holgura es $z(s) = 2(1 - s^2)$ y constr$(x) = \{-1, 1\}$. Entonces, $A(x) = \{a(1), a(-1)\}$, co$(A(x)) = \{(1, 1)'\}$ y los gradientes activos son linealmente dependientes.

Puesto que $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \text{ y } x_1 + x_2 \geq 0\}$, el único punto extremo es 0_2, cuyo constr$(0_2) = [-1, 1]$. Esta es la solución óptima del problema y un punto extremo degenerado. Nótese que $z(s) = 0$, para $s \in [-1, 1]$, entonces $B(x; z) = \{(d; h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}] : h(s) = 0 \text{ para todo } s \in [-1, 1]\}$. Además,

$N(A) = \{(y; g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}]: g(s) = y_1 + s^2 y_2$ para todo $s \in [-1, 1]\}$, así pues, es fácil ver que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}[\mathcal{S}] \neq B(x; z) \oplus N(A)$.

Hemos probado también que la CRMF es equivalente a la generalización al caso semi-infinito lineal de la cualificación de Cottle. La condición $G_o \neq \emptyset$, para aquellos $x \in F$ cuyo $\text{constr}(x) \neq \emptyset$, ha sido también utilizada como condición de regularidad en Krabs (79) para problemas semi-infinitos no lineales.

Definición 4.1

Sea x un punto posible cuyo $\text{constr}(x) \neq \emptyset$. Diremos que satisface la *cualificación de restricciones de Cottle* si y sólo si $\mathbb{C} \subseteq \text{ cl } G_o$, donde $\mathbb{C} = \{d: a^T(s)d \geq 0 \ s \in \ \text{constr}(x)\}$ y $G_o = \{d: a^T(s)d > 0 \ s \in \ \text{constr}(x)\}$.

Teorema 4.2

Para el problema (PSI2), la cualificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz es equivalente a la cualificación de Cottle.

Demostración

Sea $x \in F$ tal que x satisface la cualificación de Cottle. Si x no cumpliese la CRMF el sistema $\{a^T(s)d > 0, \ s \in \ \text{constr}(x)\}$ sería inconsistente y, por tanto, $G_o = \emptyset$. En ese caso cl $G_o = \emptyset$ y por hipótesis $\mathbb{C} = \emptyset$. Pero $0_n \in \mathbb{C}$, con lo que llegaríamos a una contradicción. Así pues, x satisface la CRMF.

Recíprocamente, si x satisface CRMF tenemos que $G_o \neq \emptyset$. Ahora bien, $G_o = \cap\{C_s: s \in \ \text{constr}(x)\} \neq \emptyset$, siendo $C_s = \{d: a^T(s)d > 0\}$, con int $C_s = C_s$. Por Teorema 6.5 en Rockafellar (70) cl $G_o = \text{cl } [\cap\{C_s: s \in \ \text{constr}(x)\}] = \cap\{\text{cl } C_s: s \in \ \text{constr}(x)\} = \{d: a^T(s)d \geq 0: s \in \ \text{constr}(x)\} = \mathbb{C}$ y, por tanto, en x se satisface la cualificación de Cottle.

■

En un reciente trabajo León y Vercher (92) han demostrado, de forma constructiva, la equivalencia entre la condición de Slater y la CRMF para el problema (PSI1). La cualificación de Slater es la condición de regularidad más utilizada en PSI convexa. Así, pues, hemos establecido condiciones locales, fácilmente verificables, que tienen la misma potencia que la cualificación de Slater en Programación Semi-Infinita Lineal. Si esta última no se cumple hay que recurrir a condiciones más débiles: cualificación de Farkas-Minkowski y regularidad Lagrangiana.

Para PSI convexa las relaciones entre la condición de Slater y las anteriores cualificaciones han sido estudiadas en López y Vercher (83), donde se demuestra:

(i) que la condición de Slater implica que el conjunto posible satisface la propiedad de Farkas-Minkowski y que todos los puntos posibles son regulares Lagrangianos, y

(ii) que ambas cualificaciones permiten también asociar a cada solución óptima un punto de Kuhn-Tucker.

La condición de punto regular Lagrangiano es una cualificación local para el problema de PSI convexa. Recordemos la definición de *cono de las tangentes a F en $\overline{x}$*, para $\overline{x} \in \mathrm{cl}F$:

$$T(F,\overline{x}) = \left\{ z: z = \lim_{k\to\infty} \lambda_k(x_k - \overline{x}), \quad \text{donde } \lambda_k > 0,\ x_k \in F \text{ y } \lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x} \right\}$$

Sean $B(\overline{x}) = -A(\overline{x}) = \{-a(s): s \in \text{constr}(\overline{x})\}$, $B(\overline{x})^* = \{d \in \mathbb{R}^n: a(s)^T d \geq 0,$ $s \in \text{constr}(\overline{x})\}$ es el cono polar de $B(\overline{x})$, y $K\{B(\overline{x})\}$ es el cono convexo generado por $B(\overline{x})$.

Definición 4.2

Para el problema (PSI1) decimos que $\overline{x} \in F$ es un *punto regular Lagrangiano* si:

(i) $T(F,\overline{x}) = \mathbb{R}^n$, cuando $\text{constr}(\overline{x}) = \emptyset$

(ii) (a) $T(F,\overline{x}) \supseteq B(\overline{x})^*$ y
(b) $K\{B(\overline{x})\}$ es cerrado, cuando $\text{constr}(\overline{x}) \neq \emptyset$.

Definición 4.3

Se dice que el sistema consistente $\{a^T(s)x \geq b(s): s \in S\}$ es un *sistema de Farkas-Minkowski* si toda relación consecuente del sistema lo es de un subsistema finito.

Definición 4.4

Se dice que un problema (PSI1) satisface la *cualificación de restricciones de Farkas-Minkowski* si el sistema $\{a^T(s) \geq b(s): s \in S\}$ es un sistema de Farkas-Minkowski.

Una caracterización y una excelente descripción de las propiedades de los sistemas de Farkas-Minkowski en PSI puede encontrarse en Goberna *et al.* (81).

En cuanto a la relación que existe entre las cualificaciones de regularidad Lagrangiana y de Farkas-Minkowski en PSIL podemos encontrar diferentes situaciones.

Ejemplo 4.2

$$\begin{array}{ll} (P_7) & \text{Min } x_1 \\ & \text{s.a. } (s-1)x_1 + s(s-2)x_2 \geq 0 \quad s \in [0,2] \end{array}$$

Es fácil ver que $F = \{(0,\delta)' : \delta \leq 0\}$ y que todas las soluciones son óptimas, aunque solo $\tilde{x} = 0_2$ es un punto extremo. Para $\tilde{x}$ tenemos que $\text{constr}(\tilde{x}) = [0,2]$, con lo que $\text{co}(A(\tilde{x})) = \{x: -1 \leq x_1 \leq 1,\ x_1^2 - 1 \leq x_2 \leq 0\}$. Consideremos $x(\delta) = (0,\delta)'$ con $\delta < 0$, entonces $z(\delta) = \delta s(s-2) \geq 0$, $\text{constr}(x(\delta)) = \{0,2\}$ y $\text{co}(A(\delta))) = \{x: -1 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 0\}$. Así pues, (P_7) no satisface la CRMF, por lo que el punto extremo $\tilde{x}$ es necesariamente degenerado (Teorema 4.1).

El sistema $\{(s-1)x_1 + s(s-2)x_2 \geq 0 \quad s \in [0,2]\}$ es de Farkas-Minkowski, pues el cono $K = K\left\{\begin{pmatrix} a(s) \\ 0 \end{pmatrix} : s \in [0,2]\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} : \beta \leq 0\right\}$ es cerrado (Corol. 3.1.1 en Goberna *et al.* (81)).

Todas las soluciones óptimas son puntos regulares Lagrangianos, pues para $\tilde{x}$ tenemos que $B(\tilde{x})^* = \{d: d_1 = 0,\ d_2 \leq 0\} = T(F,\tilde{x})$ y $K\{B(\tilde{x})\} = \{d: d_2 \geq 0\}$ es cerrado y para $x(\delta)$, con $\delta < 0$, $B(x(\delta))^* = \{d: d_1 = 0\} = T(F, x(\delta))$.

Puede verse fácilmente que en F tenemos dos desigualdades inestables, las correspondientes a los índices $\{0,2\}$. Así, las anteriores cualificaciones permiten la existencia de desigualdades inestables en el conjunto posible.

Como ya se había dicho antes, a cada solución óptima podemos asociarle un punto de Kuhn-Tucker. Dado que $c = a(2)$, la solución del problema dual es $\lambda(2) = 1$ y $\lambda(s) = 0$ para $s \neq 2$.

En el Ejemplo 4.2 se satisfacen simultáneamente las cualificaciones de Farkas-Minkowski y la regularidad Lagrangiana de todas las soluciones posibles. Sin embargo, en el siguiente no se verifica la cualificación de Farkas-Minkowski, aunque algunas de las soluciones óptimas son puntos regulares Lagrangianos. La cualificación local de regularidad Lagrangiana es la más débil de todas las que hemos estudiado para el problema (PSI1), la única desventaja de trabajar con ella es que debe comprobarse sobre cada candidato a óptimo.

Ejemplo 4.3

$$\begin{array}{ll} (P_8) & \text{Min } x_1 + x_2 \\ & \text{s.a. } sx_1 + s^2x_2 \geq s^3 \quad s \in [0,1] \end{array}$$

Es fácil ver que la desigualdad $x_1 \geq 0$ es una relación consecuente del sistema $\{sx_1 + s^2x_2 \geq s^3: s \in [0,1]\}$. Sin embargo, no lo es para ningún subsistema finito: $\{s_ix_1 + s_i^2x_2 \geq s_i^3, \quad i = 1,2,\ldots,k\}$. Podemos suponer que $s_i \neq 0$ y este subsistema finito es equivalente a: $\{x_1 \geq s_i^2 - s_1x_2, \quad i = 1,2,\ldots,k\}$. En particular, tomando $x_2 = 2$ y $x_1 = \max\{s_j(s_j - 2)\}$ tenemos una solución del subsistema tal que $x_1 < 0$. Por tanto (P_8) no satisface la cualificación de restricciones de Farkas-Minkowski.

Se puede comprobar que $F = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 1\}$. Las soluciones posibles de la forma $x(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha > 1$, $\text{constr}(x(\alpha)) = \{0\}$, no son óptimas y tampoco son puntos regulares Lagrangianos, ya que $B(x(\alpha))^* = \mathbb{R}^2$ pero $T(F, x(\alpha)) = \{y \in \mathbb{R}^2: y_1 \geq 0\}$. Los puntos $x(\beta) = \begin{pmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix}$ con $\beta \geq 0$, son todos óptimos, y puesto que $z(\beta) = s(1-s)(s+\beta), z(\beta) = 0$ si y sólo si $s = 0$ ó $s = 1$. Luego $A(x(\beta)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B(x(\beta))^* = \{y \in \mathbb{R}^2: y_1 + y_2 \geq 0\} \forall \beta \geq 0$. Para $\beta > 0, x(\beta)$ es regular Lagrangiano, pues $T(F, x(\beta)) = \{y \in \mathbb{R}^2: y_1 + y_2 \geq 0\}$. Ahora bien, el único punto extremo $\tilde{x} = (0,1)'$ —que también es solución óptima, pues $c = 1.a(1)$— no es regular Lagrangiano, ya que $T(F, x(0)) = \{y \in \mathbb{R}^2: y_1 + y_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0\}$.

5. REFERENCIAS

[1] **Anderson, E.J.** and **A.S. Lewis** (1989). "An extension of the simplex algorithm for semi-infinite linear programming". *Mathematical Programming*, **44**, 247–269.

[2] **Charnes, A., Cooper, W.W.** and **K.O. Kortanek** (1963). "Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Caratheodory". *Management Science*, **9**, 209–228.

[3] **Eckhardt U.** (1975). "Theorems on the dimension of convex sets". *Linear Algebra and its Applications*, **12**, 63–76.

[4] **Glashoff, K.** and **S.A. Gustafson** (1983). *Linear Optimization and Approximation*. Springer-Verlag, New York.

[5] **Goberna, M.A.** and **M.A. López** (1988). "A theory of linear inequality systems". *Linear Algebra and its Applications*, **106**, 77–115.

[6] **Goberna, M.A., López, M.A.** and **J. Pastor** (1981). "Farkas-Minkowski systems in semi-infinite programming". *Applied Mathematics and Optimization*, **7**, 295–308.

[7] **Goberna, M.A., López, M.A., Pastor, J.** and **Vercher, E.** (1984). "Alternative Theorems for Infinite Systems with Applications to Semi-Infinite Games". *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **4**, 218–234.

[8] **Hettich, R.** and **P. Zenke** (1982). *Numerische Methoden der Approximation und Semi-infiniten Optimierung.* B.G. Teubner, Stuttgart.

[9] **Holmes, R.** (1975). *Geometric Functional Analysis and its Applications.* Springer-Verlag. New York.

[10] **Krabs, W.** (1979). *Optimization and Approximation.* Wiley, Chichester.

[11] **León, T.** and **E. Vercher** (1992). "An Optimality Test for Semi-Infinite Linear Programming". *Optimization*, **26**, 51–60.

[12] **López, M.A.** and **E. Vercher** (1983). "Optimality conditions for non-differentiable convex semi-infinite programming". *Mathematical Programming*, **27**, 307–319.

[13] **Nash, P.** (1985). "Algebraic fundamentals of linear programming". In: *Infinite Programming, Proceedings.* Springer-Verlag. Berlin, 37–52.

[14] **Rockafellar, R.T.** (1970). *Convex Analysis.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

ENGLISH SUMMARY:

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN SEMI-INFINITE LINEAR PROGRAMMING: CONSTRAINT QUALIFICATIONS AND PROPERTIES OF THE FEASIBLE SET

Teresa León and Enriqueta Vercher

Consider the problem of minimizing a linear function $c^T x$ subject to an arbitrary family of linear constraints $a^T(s) \geq b(s), s \in \mathcal{S}$. When the index set $\mathcal{S}$ is a compact set in $\mathbb{R}^p$ and the functions $a_1, \ldots, a_n$ and b are continuous on $\mathcal{S}$ we have a continuous problem of Semi-Infinite Linear Programming (SILP).

We can state the above problem in the standard LP form by using the slack function $z(s)$:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(PSI2)} & \text{Min } c^T x & & \\
& \text{s.t. } a^T(s)x \; - & z(s) = b(s) & s \in \mathcal{S} \\
& x \in \mathbb{R}^n & z(s) \geq 0 & s \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Let us assume that the problem is consistent. Note that the set of active constraints at a feasible point coincides with the set of the zeros of its associated slack function.

First of all we prove that the candidate points for optimality are those feasible points with some active constraints. Even some inner points may have the null vector as its unique active gradient.

In SILP the null gradient, active or not, plays a crucial role in the study of some properties of the feasible set and in the statement of the necessary optimality conditions.

We have found that if a feasible point has the null vector as an active gradient then all the remaining feasible points also have it. And the same situation occurs when the null vector belongs to the convex hull of the active gradients set for some feasible point. Moreover, in that case we have shown that there exists an unstable inequality of the feasible set (the converse also holds).

We establish a necessary Kuhn-Tucker type optimality condition for SILP based on an extension of the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification (MFCQ). Although the statement of this constraint qualification seems local, in fact it is a global condition (the proof of the last result makes use of Gordan's Alternative Theorem). So, we have to check this CQ only once.

Working with the MFCQ has a major advantage: if you have a feasible point with a finite number of active constraints, you simply have to solve an LP in order to test it.

There are other properties of the problem which guarantee that MFCQ holds, for instance, the existence of a nondegenerate extreme point. Therefore, those problems for which MFCQ does not hold only have degenerate extreme points, and this would be noted for designing appropiate methods to deal with them.

It is well known that Kuhn-Tucker's criterion fails to characterize the optimality unless a CQ holds. Then we have studied other conditions weaker than MFCQ: Lagrangian regularity and the Farkas-Minkowski constraint qualification. We show the relationships among them using suitable examples.