QÜESTIIÓ, Vol 20, 1 pp. 71-86, 1996

EL POTENCIAL DE HART Y MAS-COLELL PARA JUEGOS RESTRINGIDOS POR GRAFOS

J. M. BILBAO ARRESE* y JORGE LÓPEZ VÁZQUEZ

Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla

This paper analyzes a model of formation of connected coalitions in a cooperative game. This model is a communication situation, and the Shapley value of these graph–restricted game is the Myerson value. The potential function for cooperative games was defined by Hart and Mas–Colell, and Winter showed that the Myerson value admit a potential function. We are study a recursive procedure for computing the potential of the Myerson value. In Section 3, we are use the Myerson value for measuring voting power in the Spanish and the Andalusian Parliaments.

The potential of Hart and Mas-Colell for values of graph-restricted games.

Key words: n–person games, Shapley value, Myerson value.

1991 Mathematics Subject Classification: 90D12.

1. VALORES DE JUEGOS RESTRINGIDOS POR GRAFOS

La teoría de juegos fue fundada por von Neumann y Morgenstern en su *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Estos juegos permiten modelar distintas situaciones económicas, sociales y políticas e incluyen a los juegos de votación que predicen y analizan la formación de coaliciones en organizaciones estables, parlamentos y gobiernos.

* *Correspondencia:* J. Mario Bilbao. Escuela Superior de Ingenieros, Av. Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla. Fax: (95)4556968. **e-mail:** mbilbao@matinc.us.es

–Article rebut l'abril de 1995.

–Acceptat el juny de 1995.

Definición

Un *juego* sobre N es una función

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0.$$

Los elementos de N se denominan jugadores y los elementos de 2^N son coaliciones de jugadores. El juego v es simple si

$$v : 2^N \longrightarrow \{0,1\}, \quad v(\emptyset) = 0.$$

En un juego simple, cualquier coalición es ganadora o perdedora. Denotamos por $\mathcal{W}$ a la familia de todas las coaliciones ganadoras.

Definición

Un grafo G es un par ordenado de conjuntos (N,E) tal que E es un subconjunto del conjunto de los pares no ordenados de N. Si $G = (N,E)$ es un grafo, entonces N es el conjunto de sus vértices y E el conjunto de sus aristas.

Definición

Un grafo es *conexo* si dado un par de vértices $\{x,y\}$ distintos, existe un camino x–y. Una *componente* del grafo es un subgrafo conexo maximal con respecto a la inclusión.

Definición

Un *subgrafo inducido* en $G = (N,E)$ por un subconjunto de vértices $S \subseteq N$ es el grafo que contiene a todas las aristas que unen los vértices del subconjunto y se denota por $(S,E(S))$.

Definición

Un *bloque* de G es un puente (arista cuya eliminación aumenta el número de componentes) o un subgrafo 2–conexo maximal de G.

Harary, en [6, pág. 30] demuestra que un grafo G es un grafo bloque *(graph block)* de algún grafo si y sólo si cualquier bloque de G es un subgrafo completo. Estos grafos se denominan *cycle–complete* en [10].

Myerson, en [9], estudia la cooperación parcial entre los jugadores mediante un grafo $G = (N,E)$, donde N es el conjunto de los jugadores y las aristas de E vienen dadas por los acuerdos bilaterales.

Definición

Sea (N,G,v) una situación de comunicación, donde v es un juego sobre N y $G=(N,E)$ es el grafo de comunicación. El *juego restrigido por el grafo* G es el juego $v^G : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$v^G(\emptyset)=0, \quad v^G(S) := \sum\{v(T) : T \text{ componente del subgrafo } (S,E(S))\}.$$

La familia de todas las coaliciones que inducen, en el grafo de comunicación $G=(N,E)$, subgrafos conexos se denota por

$$C=\{S\subseteq N : (S,E(S)) \text{ es conexo}\}.$$

Definición

El *valor de Myerson* para un juego v es el vector de $\mathbb{R}^{|N|}$

$$\mu(N,G,v)=\Phi\left(v^G\right),$$

donde Φ denota el valor de Shapley para el juego v.

Owen estudia juegos restringidos por grafos en [11], Borm, Nouweland, Owen y Tijs, en [1] y [2], consideran un *grafo de comunicación* y su correspondiente juego restringido. Carreras demuestra en [3] que la restricción de un juegó simple es el máximo de las componentes.

Los juegos de unanimidad en $T\neq\emptyset$ se definen por

$$u_T(S)=\begin{cases} 1, & \text{si } T\subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Los juegos de unanimidad forman una base del espacio vectorial de todos los juegos con soporte N. Cada juego (N,v) tiene una representación única, donde las *coordenadas* se denominan dividendos de Harsanyi [7]:

$$v=\sum_{T\subseteq N}\Delta_v(T)u_T.$$

La fórmula de inversión de Möbius en 2^N [13, p. 118], implica la equivalencia

$$v(S)=\sum_{T\subseteq S}\Delta_v(T) \quad\Longleftrightarrow\quad \Delta_v(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}v(T).$$

El valor de Shapley se calcula con:

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S\subseteq N:\, i\in S\}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|}, \quad i \in N.$$

Owen, en [11, Teorema 3], establece el siguiente resultado:

Los juegos restringidos por grafos v^G tienen una base formada por los juegos de unanimidad u_T, donde $T \in C$.

Una consecuencia de este resultado es que los dividendos $\Delta_{v^G}(S) = 0$, si la coalición $S \notin C$. En general, tenemos

$$v^G = \sum_{T\in C\setminus\emptyset} \Delta_{v^G}(T)u_T, \quad \mu_i(N,G,v) = \sum_{\{T\in C\setminus\emptyset: i\in T\}} \frac{\Delta_{v^G}(T)}{|T|}, \quad \forall i \in N.$$

2. EL POTENCIAL DEL VALOR DE MYERSON

Winter, en [15], define el potencial del valor de Myerson, establece su unicidad, y demuestra que

$$P(N,G,v) - P\big(N\setminus\{i\}, G\setminus\{i\}, v_{N\setminus\{i\}}\big) = \mu_i(N,G,v), \ \forall i \in N.$$

Entonces, dicho potencial $P_G(N,v) = P(N,v^G)$. La extensión de Winter determina un proceso recursivo, en el que se calculan los potenciales de los subjuegos $(S,(S,E(S)),v_S)$, que denotaremos por $P_G(S,v)$. Si comenzamos con $P_G(\emptyset,v) = 0$, el algoritmo consiste en calcular

$$P_G(S,v) = \frac{1}{|S|}\left[v^G(S) + \sum_{i\in S} P_G(S\setminus\{i\},v)\right], \ S \in 2^N.$$

A continuación, vamos a establecer un nuevo algoritmo recursivo para calcular el potencial de Myerson (y su valor), sin necesidad de calcular los valores de v^G. La clave del resultado es que una coalición no conexa es unión disjunta de sus componentes conexas.

Teorema 1 El potencial del valor de Myerson verifica:

(a) Si $S \subseteq N$ induce un subgrafo conexo, entonces:

$$P_G(S,v) = \frac{1}{|S|}\left[v(S) + \sum_{i\in S} P_G(S\setminus\{i\},v)\right].$$

(b) Si $\{S_k\}_{1\leq k\leq p}$ son las componentes conexas de S, entonces:

$$P_G(S,v) = \sum_{k=1}^{p} P_G(S_k,v).$$

Demostración

(a) Si $(S,E(S))$ es conexo, entonces $v^G(S) = v(S)$.

(b) Los juegos de unanimidad conexos son una base de los juegos v^G, por lo que

$$v^G = \sum_{T\in C\setminus\emptyset} \Delta_{v^G}(T)u_T.$$

Entonces, aplicando la proposición 1 de Hart y Mas–Colell [8] al subjuego (S,v^G), tenemos

$$P_G(S,v) = P(S,v^G) = \sum_{\{T\in C\setminus\emptyset : T\subset S\}} \frac{\Delta_{v^G}(T)}{|T|},$$

donde $\Delta_{v^G}(T)$ son los dividendos de T en el juego restringido.

Sabemos que si $S\notin C$, entonces $S = \bigcup_{k=1}^{p} S_k$, donde las componentes conexas son disjuntas dos a dos. Dado que la partición de S induce la partición

$$\{T\in C : T\subset S\} = \bigcup_{k=1}^{p}\{T\in C : T\subseteq S_k\},$$

obtenemos

$$P_G(S,v) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\{T\in C\setminus\emptyset : T\subset S_k\}} \frac{\Delta_{v^G}(T)}{|T|} = \sum_{k=1}^{p} P_G(S_k,v).$$

■

Las fórmulas explícitas para el potencial $P_G(N,v)$ se obtienen usando distintas fórmulas para los dividendos del juego restringido por el grafo v^G. Si el grafo G es un árbol, Owen en [11, Teorema 7], encuentra fórmulas que simplifican el cálculo de los dividendos del juego restringido v^G en función del juego v. Así, usando la envoltura conexa $C(S)$ (intersección de todos los conexos que contienen a S) y el conjunto de los puntos extremales $Ex(S)$, prueba que

$$\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{Ex(S)\subseteq T\subseteq S\}} \Delta_v(T).$$

Las pruebas de Owen pueden generalizarse a una clase de grafos que contiene a los árboles si podemos definir un operador envoltura para la conexión.

Edelman y Jamison, en *The theory of convex geometries* [5], proporcionan un marco general para estudiar familias de subconjuntos de un conjunto finito N que tienen las propiedades que necesitamos.

Definición

Sea C una familia de subconjuntos de N, que denominamos *conjuntos convexos*, cerrada para la intersección y que contiene a N y $\emptyset$. La *envoltura convexa* de S es la intersección de todos los convexos que contienen a S, y se denota por $C(S)$. Una *base* para $S \in 2^N$, es un subconjunto minimal $B \subset S$ tal que $C(B) = C(S)$.

Definición

Un punto i de un conjunto convexo $S \in C$ es un *punto extremal* de S si $S \setminus \{i\} \in C$. El conjunto de los puntos extremales de S se denota por $Ex(S)$.

Propiedad de Minkowski–Krein–Milman

Cualquier convexo es la envoltura convexa de sus puntos extremales.

Definición

Una *geometría convexa* es un par (N, C) tal que C es una familia de subconjuntos de N, cerrada para la intersección, que contiene a N y $\emptyset$, y verifica la propiedad de Minkowski–Krein–Milman.

Jamison, en [5, Teorema 3.7], establece la propiedad que usaremos para extender la fórmula de los dividendos de Owen a situaciones de comunicación tales que su grafo sea un *grafo bloque conexo.* Dicha propiedad es: *Un grafo $G = (N, E)$ es un grafo bloque conexo si y sólo si la familia de subconjuntos de N que inducen en G subgrafos conexos, es una geometría convexa.*

Proposición 1

Sea (N, G, v) una situación de comunicación tal que G es un grafo bloque conexo. Entonces:

$$P_G(N,v) = \sum_{S \in C \setminus \{\emptyset\}} \frac{1}{|S|} \left[\sum_{\{Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} \Delta_v(T) \right].$$

Demostración

Sabemos que

$$P_G(N,v) = \sum_{S \in C \setminus \emptyset} \frac{\Delta_{v^G}(S)}{|S|},$$

luego es suficiente probar que $\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} \Delta_v(T)$. Usando el razonamiento de Owen, [11, Teorema 6], con la envoltura conexa, obtenemos

$$\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{T : C(T) = S\}} \Delta_v(T).$$

Veamos que $\{T : C(T) = S\} = \{Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}$. Sea T tal que su envoltura $C(T) = S = C(S)$, porque $S \in C$. Entonces, T y S tienen la misma base. Como S es conexo, la propiedad de Minkowski asegura que la base es $Ex(S)$, luego $Ex(S) \subseteq T \subseteq S$. Para establecer la inclusión contraria, supongamos que $Ex(S) \subseteq T \subseteq S$. Las envolturas verifican

$$S = C(Ex(S)) \subseteq C(T) \subseteq C(S) = S,$$

por lo que $C(T) = S$.

■

Proposición 2

Sea (N, G, v) una situación de comunicación tal que G es un grafo bloque conexo. Entonces:

$$P_G(N,v) = \sum_{S \in C \setminus \{\emptyset\}} \frac{1}{|S|} \left[\sum_{\{S \setminus Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \right].$$

Demostración

Los juegos de unanimidad conexos son una base de los juegos v^G, luego aplicando el juego restringido a los conexos, obtenemos:

$$v(S) = v^G(S) = \sum_{\{T \in C : T \subseteq S\}} \Delta_{v^G}(T), \quad \forall S \in C.$$

La familia C es un retículo [5] y aplicando la fórmula de inversión de Möbius [13, p. 116], los dividendos de v^G se expresan en función de los valores de v. Es decir,

$$\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{T \in C : T \subseteq S\}} v(T) \mu(T,S), \quad \forall S \in C.$$

La función de Möbius se calcula en [5, Teorema 4.3]:

$$\mu(T,S) = \begin{cases} (-1)^{|S|-|T|}, & \text{si } S \setminus T \subseteq Ex(S) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $T \subseteq S$, entonces $S \setminus T \subseteq Ex(S)$ si y sólo si $S \setminus Ex(S) \subseteq T$. En consecuencia,

$$\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{S \setminus Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

■

Proposición 3

Sea (N,G,v) una situación de comunicación tal que v es un juego simple monótono y G es un grafo bloque conexo. Entonces:

(a) El potencial del valor de Myerson verifica:

$$P_G(N,v) = \sum_{S \in C \cap \mathcal{W}} \frac{\Delta_{v^G}(S)}{|S|}.$$

(b) Si v es cero–normalizado y $|S| = 2$, entonces:

$$\Delta_{v^G}(S) = 1 \text{ si y sólo si } S \in C \cap \mathcal{W}.$$

(c) Si $S \in C \cap \mathcal{W}$ y $S \setminus Ex(S) \in \mathcal{W}$, entonces $\Delta_{v^G}(S) = 0$.

(d) El valor de Myerson es:

$$\mu_i(N,G,v) = \sum_{\{S \in C \cap \mathcal{W} : i \in S\}} \frac{\Delta_{v^G}(S)}{|S|}, \quad \forall i \in S.$$

Demostración

(a) Si $S \notin \mathcal{W}$, entonces $v(S) = 0$ y $v(T) = 0$ para cualquier coalición T que pertenezca al intervalo (para la inclusión) $[S \setminus Ex(S), S]$. Si aplicamos la proposición 2, los sumandos correspondientes a coaliciones $S \notin \mathcal{W}$ se anulan.

(b) Si $S \in C \cap \mathcal{W}$, entonces $v(S) = 1$ y $S = \{i,j\} \in C$. Como $S \setminus \{i\}$ y $S \setminus \{j\}$ son conexos, tenemos que $Ex(S) = S$. Entonces,

$$[S \setminus Ex(S), S] = \{\emptyset, \{i\}, \{j\}, S\}.$$

El juego v verifica que $v(\emptyset) = v(i) = v(j) = 0$, luego el dividendo para v^G es $\Delta_{v^G}(S) = v(S) = 1$.

Recíprocamente, si $S \notin C \cap \mathcal{W}$, o bien $S \notin C$, con lo que su dividendo $\Delta_{v^G}(S) = 0$; o bien $S \notin \mathcal{W}$, con lo que $\Delta_{v^G}(S) = v(S) = 0$.

(c) Si $S \setminus Ex(S) \in \mathcal{W}$, tenemos que todas las coaliciones del intervalo $[S \setminus Ex(S), S]$ son ganadoras. Entonces,

$$\Delta_{vG}(S) = \sum_{\{S \setminus Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} = \sum_{B \subseteq Ex(S)} (-1)^{|B|} = 0,$$

donde $B = S \setminus T$.

(d) Los sumandos de las coaliciones $S \notin \mathcal{W}$ valen cero.

■

Nota: En las proposiciones anteriores, hemos obtenido fórmulas para calcular los dividendos y el valor de Myerson cuando el grafo de comunicación es un grafo bloque conexo. Sin embargo, estas fórmulas pueden usarse si G es un grafo bloque no conexo, con componentes $G_k = (N_k, E(N_k))$. En ese caso, tenemos que

$$\mu_i(N, G, v) = \mu_i(N_k, G_k, v), \ \forall i \in N_k.$$

3. EL PODER EN LOS PARLAMENTOS DE ESPAÑA Y DE ANDALUCÍA

En esta sección, vamos a aplicar los resultados obtenidos a dos juegos simples de votación ponderada. Estos juegos se definen en un conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de jugadores y, cada jugador, que puede ser un individuo, un grupo parlamentario o una nación, tiene un número de votos que denotamos $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Una coalición de jugadores S es un subconjunto de N, y los votos que reune son la suma de los que tienen sus componentes

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i.$$

Una coalición de jugadores S es ganadora si $w(S) \geq q$, donde q es la mayoría exigida, siendo $q > \frac{1}{2} w(N)$ para evitar dos coaliciones ganadoras cuya intersección sea vacía.

Un juego de votación queda determinado mediante los datos

$$[q;\ w_1, w_2, \ldots, w_n].$$

Ejemplo 1

El primer juego se define en el Congreso de los Diputados del Parlamento de España. Los jugadores son los grupos parlamentarios del PSOE (1), PP (2), IU (3) y CiU (4), con la mayoría simple $q = 176$. Entonces, el juego de votación ponderada es

$$[176;\ 159, 141, 18, 17].$$

La familia de las coaliciones ganadoras es

$$\mathcal{W} = \{\{12\}, \{13\}, \{14\}, \{123\}, \{124\}, \{134\}, \{234\}, \{1234\}\},$$

donde la coalición $\{i, \ldots, j\}$ se denota por $\{i \ldots j\}$.

Este juego es el *four person apex game*, que analiza Owen en [12], dado que su función característica es

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \in S \text{ y } |S| \geq 2, \text{ o bien } S = N \setminus \{1\} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor de Shapley es

$$\Phi(N, v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Calculamos el valor de Myerson para la situación de comunicación dada por el grafo $G = (N, E)$ del camino izquierda–derecha (*policy order*) $3 - 1 - 4 - 2$, por lo que

$$N = \{1,2,3,4\}, \quad E = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}.$$

La familia de todas las coaliciones $S \subseteq N$ que inducen un subgrafo $(S, E(S))$ conexo es:

$$C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{13\}, \{14\}, \{24\}, \{134\}, \{124\}, \{1234\}\}.$$

El algoritmo para calcular el potencial del valor de Myerson comienza con:

$$P_G(\emptyset) = 0, \quad P_G(i) = v(i) = 0, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Calculamos el potencial de las coaliciones no conexas, con la suma del potencial de sus componentes,

$$P_G(12) = P_G(1) + P_G(2) = 0, \ P_G(23) = P_G(34) = 0.$$

Las coaliciones conexas verifican:

$$P_G(13) = (1/2)\left[v(13) + P_G(1) + P_G(3)\right] = 1/2,\ P_G(14) = 1/2,\ P_G(24) = 0.$$

De manera análoga, obtenemos:

$$P_G(123) = P_G(13) + P_G(2) = 1/2,\ P_G(234) = P_G(24) + P_G(3) = 0.$$

Para las coaliciones conexas restantes, tenemos

$$P_G(124) = 1/2,\ P_G(134) = 2/3,\ P_G(1234) = 2/3.$$

Entonces, el valor de Myerson del juego del Congreso, restringido por el camino izquierda–derecha es el gradiente (discreto) de $P_G(N, v)$, dado por

$$\mu(N, G, v) = \left(\frac{2}{3} - 0, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \frac{1}{2}, \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

El camino G estudiado es un grafo bloque conexo y sus coaliciones ganadoras y conexas son

$$C \cap \mathcal{W} = \{\{13\}, \{14\}, \{124\}, \{134\}, \{1234\}\}.$$

El juego es cero–normalizado, luego los dividendos $\Delta_{vG}(i) = 0$, $\forall i \in N$. La proposición 3 implica que

$$\Delta_{vG}(13) = \Delta_{vG}(14) = 1, \quad \Delta_{vG}(12) = \Delta_{vG}(34) = 0.$$

Además, $N \setminus Ex(N) = \{14\} \in \mathcal{W}$, implica que $\Delta_{vG}(N) = 0$. Calculamos los dividendos restantes con la fórmula de la proposición 2,

$$\begin{aligned}
\Delta_{vG}(124) &= v(4) - v(14) - v(24) + v(124) = 0, \\
\Delta_{vG}(134) &= v(1) - v(13) - v(14) + v(134) = -1.
\end{aligned}$$

En consecuencia, los valores de Myerson son:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= (1/2)[\Delta_{vG}(13) + \Delta_{vG}(14)] + (1/3)[\Delta_{vG}(124) + \Delta_{vG}(134)] = 2/3. \\
\mu_2 &= (1/3)\Delta_{vG}(124) = 0, \\
\mu_3 &= (1/2)\Delta_{vG}(13) + (1/3)\Delta_{vG}(134) = 1/6. \\
\mu_4 &= (1/2)\Delta_{vG}(14) + (1/3)[\Delta_{vG}(124) + \Delta_{vG}(134)] = 1/6.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

En el Parlamento de Andalucía, los grupos parlamentarios son

$$N = \{ \text{IU–LV–CA, PP de Andalucía, PSOE de Andalucía} \},$$

y el juego del poder parlamentario andaluz queda definido por

$$[55; 20, 41, 45]$$

El análisis no incluye al grupo del PA, con 3 votos, porque su poder en todas las situaciones es cero. Hay un total de $2^{\binom{n}{2}} = 2^3 = 8$ grafos de comunicación posibles, que denominaremos *escenarios*. Los vértices de cada grafo son los partidos y cada arista que une dos partidos representa una coalición entre ambos. Si no hay arista entre dos partidos, entonces los acuerdos entre ambos no son viables.

Escenario 1	= Acuerdos IU–PSOE
Escenario 2	= Acuerdos PSOE–PP
Escenario 3	= Acuerdos IU–PP
Escenario 4	= Acuerdos IU–PSOE y PSOE–PP
Escenario 5	= Acuerdos IU–PSOE y IU–PP
Escenario 6	= Acuerdos IU–PP y PSOE–PP
Escenario 7	= Acuerdos entre los tres partidos
Escenario 8	= Ningún acuerdo

Los índices de poder, que se obtienen calculando, con el algoritmo establecido en la sección 2, la función potencial de Myerson [15], es decir el potencial de Hart y Mas–Colell [8] del juego restringido por el grafo, para cada uno de los ocho escenarios descritos, son:

El Poder Coalicional en Andalucía

	PSOE	PP	IU
Escenario 1	1/2	0	1/2
Escenario 2	1/2	1/2	0
Escenario 3	0	1/2	1/2
Escenario 4	2/3	1/6	1/6
Escenario 5	1/6	1/6	2/3
Escenario 6	1/6	2/3	1/6
Escenario 7	1/3	1/3	1/3
Escenario 8	0	0	0

Para calcular el valor de Myerson, se puede usar el programa de computación simbólica Mathematica de Wolfram [16]. En primer lugar, se obtiene la función v^G con el *Package* DiscreteMath, creado por Skiena [14] y después se calcula el valor de Shapley de v^G con el potencial de Hart y Mas–Colell, integrado en el *Package* creado por Carter [4].

REFERENCIAS

[1] **Borm, P., Owen, G.** and **Tijs, S.** (1992). "The Position Value for Communication Situations". *SIAM J. on Discrete Math.* **5**, 305–320.

[2] **Borm, P., Nouweland, A., Owen, G.** and **Tijs, S.** (1993). "Cost Allocation and Communication". *Naval Research Logistics* **40**, 733–744.

[3] **Carreras, F.** (1991). "Restriction of Simple Games". *Mathematical Social Sciences* **21**, 245–260.

[4] **Carter, M.** (1993). "Cooperative Games". En: *Economic and Financial Modeling with* Mathematica (**Varian, H. R.,** Ed.) 167–191, TELOS, Springer–Verlag.

[5] **Edelman, P.H.** and **Jamison, R.E.** (1985). "The theory of convex geometries". *Geometriae Dedicata* **19**, 247–270.

[6] **Harary, F.** (1969). *Graph Theory.* Addison–Wesley.

[7] **Harsanyi, J.C.** (1963). "A Simplified Bargaining Model for the n–Person Cooperative Game". *International Economic Review* **4**, 194–220.

[8] **Hart, S.** and **Mas–Colell, A.** (1988). "The Potential of the Shapley Value". En: *The Shapley Value,* (**Roth, A. E.,** Ed.) 127–137, Cambridge Univ. Press.

[9] **Myerson, R.B.** (1977). "Graphs and Cooperation in Games". *Math. Oper. Res.* **2**, 225–229.

[10] **Nouweland, A.** and **Borm, P.** (1991). "On the Convexity of Communication Games". *Internat. J. Game Theory* **19**, 421–430.

[11] **Owen, G.** (1986). "Values of Graph–Restricted Games". *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* **7**, 210–220.

[12] **Owen, G.** (1988). "Multilinear extension of games". En: *The Shapley Value,* (**Roth, A. E.,** Ed.) 139–151, Cambridge Univ. Press.

[13] **Stanley, R.P.** (1986). *Enumerative Combinatorics, Vol. I,* Wadsworth.

[14] **Skiena, S.** (1990). *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorial and Graph Theory with* Mathematica, Addison–Wesley.

[15] **Winter, E.** (1992). "The Consistency and Potential for Values of Games with Coalition Structure". *Games and Economic Behavior* **4**, 132–144.

[16] **Wolfram, S.** (1991). Mathematica *: A System for Doing Mathematics by Computer,* Addison–Wesley.

ENGLISH SUMMARY:

HART AND MAS-COLELL POTENTIAL FOR VALUES OF GRAPH-RESTRICTED GAMES

J.M. Bilbao Arrese and Jorge López Vázquez

1. VALUES OF GRAPH-RESTRICTED GAMES

The purpose of this paper is to develop the potential function of the Myerson value and its properties. The potential function for cooperative games was defined by Hart and Mas–Colell [8]. This function assigns to each game (N,v) just *one number* $P(N,v)$, and $P(N,v)-P(N\setminus\{i\},v)$ is equal to his Shapley value. This seems to be a most efficient algorithm for computing Shapley values (see [4, pp. 187–189]).

The notion of values of graph–restricted games is due to Myerson [9]. Owen, Borm, Nouweland and Tijs defined *communication games* (N,G,v), where the graph–restricted game is $v^G : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$v^G(S) := \sum\{v(T) : T \text{ components of } (S,E(S))\}.$$

The unanimity game on $T \neq \emptyset$ is defined by

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{if } T \subseteq S \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Each game (N,v) has a unique representation,

$$v = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) u_T.$$

The Möbius inversion formula of 2^N (see [13, p. 118]) implies

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_v(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

Following Harsanyi [7], we shall call them the *dividends* in game v. The Shapley value has the simple form:

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N:\, i \in S\}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|}, \quad i \in N.$$

Owen [11, Th. 3] gave the next result:

> *The unanimity games u_T, where T is connected in the graph G, form a basis for the graph–restricted games v^G.*

2. THE POTENTIAL OF THE MYERSON VALUE

Winter [15] defined the potential of the Myerson value and showed: *There exists a unique $P(N,G,v)$. Moreover,*

$$P(N,G,v) - P\left(N \setminus \{i\}, G \setminus \{i\}, v_{N \setminus \{i\}}\right) = \mu_i(N,G,v).$$

We prove the main result in the Theorem 1:

The potential function P_G satisfies:

a) $P_G(S,v) = \frac{1}{|S|}\left[v(S) + \sum_{i \in S} P_G(S \setminus \{i\}, v)\right]$, if S is connected.

b) $P_G(S,v) = \sum_k P_G(S_k, v)$, where $\{S_k\}$ are the components of S.

An *alignement* on a finite set N is a family C of subsets of N (to be considered convex sets), which is closed under intersection and which contains both N and $\emptyset$.

The smallest member of C containing a set $S \subseteq N$ is the *convex hull* of S, denoted by $C(S)$. A point i of a set $S \in C$ is an *extreme point* of S if $S \setminus \{i\} \in C$. The set of extreme points of S is denoted by $Ex(S)$.

A *convex geometry* is an alignement (N,C), satisfying the following additional property:

Minkowski–Krein–Milman Property

Every convex set is the convex hull of its extreme points.

A graph $G = (N, E)$ is a *block graph* (in [10] is called *cycle–complete*) if every block is a complete graph (see [6, p. 30]). If G is a disjoint union of trees, then G is a block graph.

The following theorem is due to Jamison [5, Th. 3.7]:

G=(N,E) is a connected block graph if and only if the collection of subsets of N which induce connected subgraphs is a convex geometry.

If the communication graph is a tree, then Owen [11] gave an simple formula for computing the dividends in game v^G,

$$\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} \Delta_v(T).$$

We extend the formula to cases where the communication graph is a connected block graph. Moreover, in the lattice of convex sets of a convex geometry and apply its Möbius function [5, Th. 4.3], we prove the following formula:

$$\Delta_{v^G}(S) = \sum_{\{S \setminus Ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

3. VOTING POWER IN THE SPANISH AND THE ANDALUSIAN PARLIAMENTS

This section analizes power in the context of a weighted majority game in the Spanish and the Andalusian Parliaments. The calculation of power indices may give information about the process which determines the seat distribution and decision rules of voting.

The Myerson value assume that *only* minumum connected (in the communication graph) winning coalitions will be formed. The consideration that cooperation structures influence coalition formation, certainly represents an step towards a more realistic measurement of voting power.