QÜESTIIÓ, vol. 22, 3, p. 471-489, 1998

TOUR EULERIÀ SENSE GIRS EN U EN UN GRAF ORIENTAT SIMPLE

D. SOLER FERNÁNDEZ
Universitat Politècnica de València*

Sigui $G = (V,A)$ un graf orientat eulerià simple, hi estudiem la recerca d'un tour eulerià sense girs en U, és a dir, sense recórrer consecutivament parells d'arcs $(u,v),(v,u)$, $u,v \in V$. Desconeguda la complexitat d'aquest problema, generalitzem un resultat d'un cas particular resolt en temps polinomial, proporcionant una condició sota la qual es pot construir en temps polinomial un tour eulerià sense girs en U sobre G. Aquesta condició es basa, a més a més, en l'eliminació de vèrtexs candidats a contenir girs en U en un tour eulerià amb mínim nombre d'ells.

Eulerian tour without U-turns in a simple digraph

Paraules clau: Gir en U, graf orientat U-eulerià, H-subgraf.

Classificació AMS: 68R05,68R10

* Universitat Politècnica de València. Departament de Matemàtica Aplicada. Camí de Vera, 14. 46071 València.

– Rebut l'abril de 1997.
– Acceptat el setembre de 1998.

1. INTRODUCCIÓ I CONCEPTES PREVIS

Sigui $G=(V,A)$ un graf orientat, el problema de trobar-hi un tour eulerià (tour que recorre casdascun dels arcs exactament una vegada), és un problema clàssic i senzill de Teoria de Grafs. És suficient veure que G és connex i que el nombre d'arcs que arriben a v ($d^{+}(v)$) coincideix amb el nombre d'arcs que surten de v ($d^{-}(v)$) $\forall v \in V$. Es diu aleshores que G és eulerià i existeixen diverses tècniques per trobar-hi un tour eulerià, potser la més coneguda sigui la regla de Fleury. Aquest problema serveix de base per a la resolució d'altres problemes més complexos amb aplicacions importants al camp de la investigació operativa: transport de mercaderies, recollida d'escombraries, llevaneus, repartiment de correu, etc.

L'estudi es complica si imposem la restricció que el tour eulerià no recorri consecutivament parells d'arcs $(u,v),(v,u)$, $u,v \in V$, és a dir, que no realitzi **girs en U**, girs que són els prohibits per antonomàsia en problemes reals de rutes de vehicles. No tot graf orientat eulerià admet un tour eulerià sense girs en U i si l'admet, les tècniques clàssiques de recerca d'un tour eulerià no garanteixen trobar-ne un sense girs en U. A més a més, el nombre de tours eulerians distints en un graf orientat no és polinomial en la grandària del graf com demostra Fleischner (1983).

Per simplificar les referències en aquest problema, direm que un graf orientat és **U-eulerià** si admet un tour eulerià sense girs en U, al qual anomenarem **tour U-eulerià**. Estudiem en aquest article el problema de reconèixer si un graf orientat és U-eulerià, i ens restringim al cas que el graf orientat sigui simple (sense arcs repetits). Aquest problema l'anomenarem Problema del Graf Orientat U-eulerià (PGOU) i abreviarem l'expressió *graf orientat eulerià simple* per g.o.e.s.

Com veurem en la secció següent, el PGOU es pot resoldre sense necessitat d'enumerar els tours eulerians del graf orientat fins trobar-ne un sense girs en U; el problema rau en què aquesta resolució consumeix un temps exponencial en la grandària del graf orientat. La clau es troba, per tant, en saber si el PGOU és un problema polinomial o NP-complet. Aquesta qüestió no té resposta de moment, malgrat els nostres esforços al respecte, encara que donada la complexitat del PGOU, tot sembla indicar que és NP-complet.

L'objecte d'aquest article és, per tant, donar una condició suficient de g.o.e.s. U-eulerià, verificable en temps polinomial i amb les menors restriccions possibles. Per a tal efecte, generalitzarem un cas particular del PGOU resolt en temps polinomial per Thomassen (1990), el qual exposarem també en la secció següent.

Al llarg d'aquest treball farem ús de les notacions i definicions bàsiques següents, donades totes elles sobre un g.o.e.s. $G=(V,A)$:

– Anomenarem **invers** d'un arc, un arc paral·lel i de sentit contrari que connecta el mateix parell de vèrtexs.

– Denotarem per **U(v)** el nombre de parelles d'arcs inversos incidents amb el vèrtex v de G.

– Anomenarem **vèrtex final** un vèrtex v amb $d^+(v) = U(v) = 1$.

– Direm que els vèrtexs $v = u_0, u_1, \dots, u_{k+1} = w$, $k \geq 0$ formen un **camí maximal doble** en G si acompleixen les tres condicions següents:

1) $(d^+(v) \neq 2$ o $U(v) \neq 2)$ i $(d^+(w) \neq 2$ o $U(w) \neq 2)$.
2) $(u_i, u_{i+1}), (u_{i+1}, u_i) \in A$ $i = 0, 1, \dots, k$.
3) Si $k \geq 1$, $d^+(u_i) = U(u_i) = 2$ $i = 1, \dots, k$.

Si $k \geq 1$ als vèrtexs u_i $i = 1, \dots, k$ els anomenarem **vèrtexs interiors** del camí maximal doble.

– Sigui $v \in V$ amb $d^+(v) \geq 3$ i sigui T un tour eulerià en G. T passa pel vèrtex v almenys tres vegades. Siguin a_1a_2, a_3a_4 i a_5a_6 tres transicions (girs) de T en v, fetes en aquest ordre, amb $a_1, \dots a_6 \in A$. Anomenarem **3-intercanvi** l'operació de permutar aquests girs en v pels girs a_1a_4, a_3a_6 i a_5a_2 (veure Figura 1).

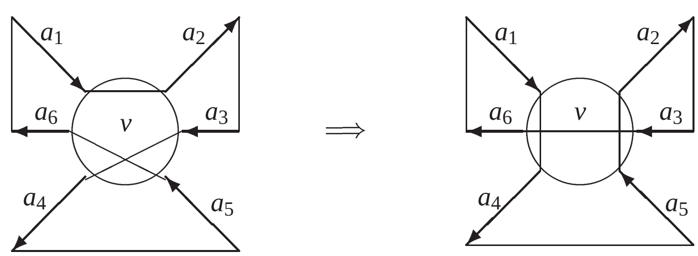

Figura 1. Exemple de 3-intercanvi a un vèrtex v.

Noteu que un 3-intercanvi ens proporciona un nou tour eulerià en G.

2. CAS PARTICULAR I RESOLUCIÓ DEL PGOU EN TEMPS EXPONENCIAL

El PGOU generalitza un altre problema de Teoria de Grafs anomenat Problema del **doble recorregut fort** i que consisteix en: donat un graf no orientat connex, saber si conté una cadena tancada que recorre cadascuna de les seves arestes exactament dues vegades, una en cada sentit i no de manera consecutiva (sense realitzar girs en U). Aquesta cadena tancada rep el nom de doble recorregut fort.

El problema del doble recorregut fort va ser plantejat per Ore (1951) i el primer resultat teòric sobre aquest problema va ser donat per Troy (1966), qui va demostrar que *donat un graf no orientat G, amb tots els seus vèrtexs amb grau inferior a 4, no conté un doble recorregut fort si el nombre de vèrtexs de G amb grau 3 és múltiple de 4.* Altres autors, com Brenner i Lindon (1984) i Eggleton i Skilton (1984) van tractar el problema del doble recorregut fort, però va ser Thomassen (1990) qui, en les seves paraules, va resoldre el vell problema plantejat per Ore, en demostrar el teorema següent, fent ús d'alguns resultats obtinguts per Xuong (1979):

Teorema 1. *Donat un graf connex no orientat G, els enunciats següents són equivalents:*

1) *G admet un doble recorregut fort.*
2) *G no conté vèrtexs amb grau 1 i conté un arbre generador T, tal que tota component connexa de $G-T$ amb un nombre imparell d'arestes, conté un vèrtex v amb grau major que 3 en G.*

La importància d'aquesta caracterització, de la qual farem ús a la secció cinquena, rau en l'existència d'un algorisme polinomial que troba tal arbre o decideix que no existeix. Thomassen demostra l'existència de l'algorisme anterior basant-se en l'existència d'un algorisme polinomial per resoldre el Problema de la Paritat en matroids gràfiques, algorisme donat per Gabow i Stallmann (1986), encara que aquesta demostració conté algunes falles. Benavent i Soler (1998a) proporcionen una versió corregida d'aquesta demostració i, basant-se en ella, donen un algorisme que en temps polinomial troba el doble recorregut fort o decideix que tal recorregut no existeix.

Per tant, el problema del doble recorregut fort és un cas particular del PGOU —és suficient desdoblar cada aresta del graf no orientat en dos arcs de sentits oposats (veure exemple en Figura 2)— resolt en temps polinomial. Com hem dit a la secció anterior, malgrat els nostres esforços al respecte, no saben si el PGOU és polinomial o NP-complet, però almenys el sabem resoldre en temps exponencial mitjançant la seva transformació al Problema del Circuit Hamiltonià que, recordem, consisteix a saber si un graf orientat $G=(V,A)$ admet un circuit que passi per cadascun dels vèrtexs de V exactament una vegada (circuit hamiltonià). Aquest problema és NP-complet i existeixen diversos mètodes per a la seva resolució. Laporte (1992) recopila els coneguts fins a la data.

El PGOU sobre un graf orientat eulerià no necessàriament simple $G = (V,A)$ es transforma fàcilment al Problema del Circuit Hamiltonià en la forma següent:

Construir un graf orientat $G' = (V',A')$ on V' es correspon biunívocament amb A ($v_a \in V'$ si i sols si $a \in A$) i l'arc (v_a, v_b) pertany a A' si, i sols si, $a = (i, j)$, $b = (j,k)$ i $k \neq i$, és a dir, cada arc de G' es correspon amb un gir no en U en el graf orientat G. És fàcil veure que G admet un tour U-eulerià si, i sols si, G' admet un circuit hamiltonià, essent evident la transformació del circuit hamiltonià en G' al tour U-eulerià en G.

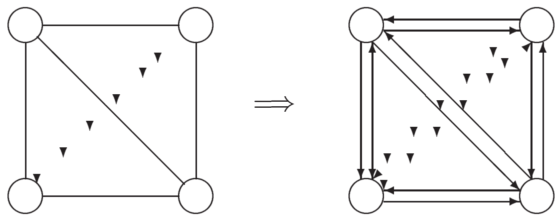

Figura 2. Exemple de transformació d'un problema del doble recorregut fort en un PGOU.

3. H-SUBGRAFS

Un graf orientat simple U-eulerià ha d'acomplir dues condicions bàsiques: no contenir vèrtexs finals i contenir almenys un vèrtex v amb $d^+(v) \neq 2$ o $U(v) \neq 2$ (no ser un cicle doble). En aquesta secció veiem una altra condició necessària que ha d'acomplir tal graf orientat. És per això que donem la definició següent:

Definició 2. *Sigui $G = (V,A)$ un g.o.e.s. i siguin $u, v \in V$ amb $d^+(u) = d^+(v) = 2$ i U(u)=U(v)=1 tals que existeix en G un camí maximal doble $u = u_0, u_1, \ldots, u_{k+1} = v$ amb $k \geq 0$. Anomenaren* **H-subgraf** *de G un subgraf de G format per tots els vèrtexs d'aquest camí maximal doble, junt amb tots els arcs incidents i vèrtexs adjacents als vèrtexs esmentats. A u i v els anomenarem* **vèrtexs intermedis** *del H-subgraf.*

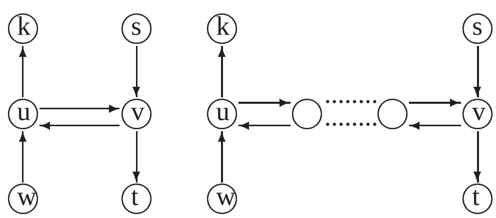

Figura 3. Formes de H-subgraf.

La Figura 3 ens mostra els dos tipus de H-subgrafs que poden aparèixer en un g.o.e.s., segons que $k=0$ o $k>0$. Noteu que en aquests H-subgrafs es podrà donar eventualment un dels dos casos següents: a) $k=s$ i/o $w=t$ i b) $k=t$ i/o $w=s$.

Un tour eulerià amb mínim nombre de girs en U sobre un g.o.e.s. no pot realitzar dos girs en U en un vèrtex interior d'un camí maximal doble que contingui per un extrem un vèrtex v amb $d^+(v)=2$ i $U(v)=1$. En cas contrari, creuant ambdós girs en U, obtindríem dos circuits que en creuar-se en v donarien un tour eulerià amb un gir en U menys. De fet, es podrà veure més endavant amb un raonament similar, que un tour eulerià amb mínim nombre de girs en U sobre un g.o.e.s. no contindrà girs en U als vèrtexs interiors d'un camí maximal doble, independentment de com siguin els seus vèrtexs extrems.

Per tant, cada vegada que aparegui un H-subgraf del segon tipus ($k>0$), es podrà transformar en un altre del primer tipus ($k=0$) comprimint el camí maximal doble en dos arcs inversos que uneixin els vèrtexs intermedis del H-subgraf. Si abans de realitzar aquesta compressió, existís al graf orientat original l'arc (u,v) o l'arc (v,u) (però no els dos ja que $U(u)=U(v)=1$), substituïm l'arc (u,v) ((v,u)) per la cadena (u,u'),(u',v) ((v,v'),(v',u)) on v' (u') serà un nou vèrtex amb grau de sortida i grau d'arribada 1. El motiu d'aquesta substitució és que el nou graf orientat continuï essent simple, sense lloc a confusió a l'hora de realitzar o no girs en U.

A partir d'ara suposarem doncs, i sense pèrdua de generalitat, que tots els H-subgrafs tenen els seus vèrtexs intermedis adjacents per dos arcs inversos.

Definició 3. *Considerem un H-subgraf d'un g.o.e.s. i suposem que u i v són els seus vèrtexs intermedis i (u,v),(v,u), (u,k),(w,u),(s,v) i (v,t) els arcs del H-subgraf. Anomenarem* **trencament** *del H-subgraf al desdoblament del seus vèrtexs intermedis en u' i u'' i en v' i v'' respectivament, de manera que obtenim dos camins sense vèrtexs interiors en comú* (s,v',u'',k) *i* (w,u',v'',t) *(veure Figura 4).*

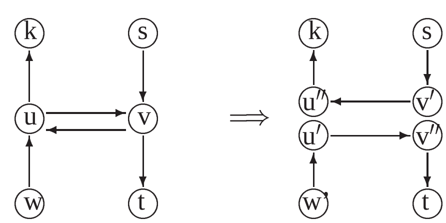

Figura 4. Trencament d'un H-subgraf.

En trencar un H-subgraf, eventualment es podria desconnectar el graf orientat original. Donat un g.o.e.s. G, denotem per H_G el nombre de components fortament connexes (c.f.c.) que apareixen al graf orientat resultant de trencar tots els seus H-subgrafs. Convenim que $H_G = 1$ si G no té H-subgrafs. H_G està ben definit, ja que no depèn de l'ordre en què es produeix el trencament dels H-subgrafs, en no tenir dos H-subgrafs distints, vèrtexs intermedis comuns.

Teorema 4. *Tot tour eulerià en un g.o.e.s. G té almenys $H_G - 1$ girs en U en vèrtexs intermedis de H-subgrafs.*

Demostració. Suposem que existeix un tour eulerià en G amb k girs en U en vèrtexs intermedis de H-subgrafs, essent $k < H_G - 1$. Si trenquem cadascun dels H-subgrafs on el tour no ha realitzat un gir en U en un dels seus vèrtexs intermedis, no es desconnecta el graf G. Com que cada vegada que es trenca un H-subgraf s'afegeix com a molt una c.f.c. al nombre d'existents, si trenquem tots els H-subgrafs de G tindrem com a màxim $k+1$ c.f.c. amb $k+1 < H_G$, fet que és absurd per definició de H_G.

■

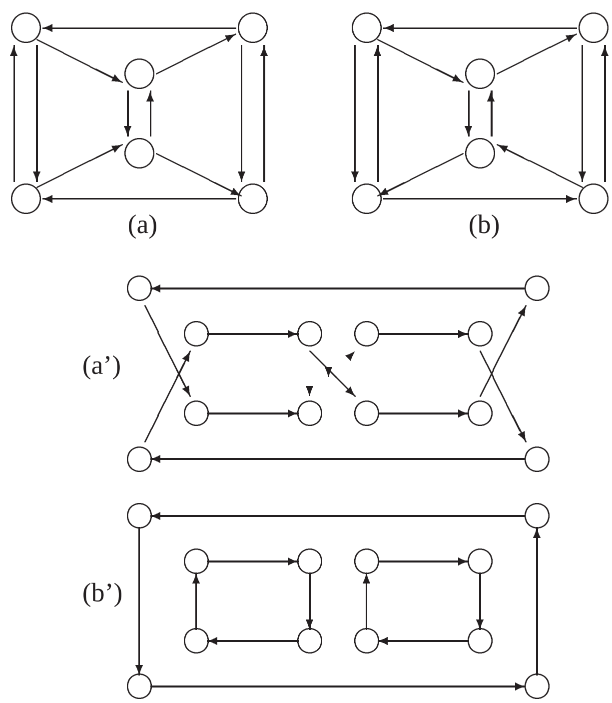

Figura 5. Trencament dels H-subgrafs de dos grafs orientats similars amb resultats diferents.

Per tant, tenim la condició necessària de graf orientat simple U-eulerià següent:

Corol·lari 5. *Si G és un graf orientat simple U-eulerià, aleshores $H_G = 1$.*

En la Figura 5 es constaten clarament els resultats del Teorema 4 per a dos grafs orientats eulerians pràcticament idèntics. Mentre que al graf orientat (a) $H_G = 1$, al graf orientat (b) $H_G = 3$. En trencar els H-subgrafs de (a) obtenim directament un tour U-eulerià. En canvi, és evident que tot tour eulerià en (b) realitzarà almenys dos girs en U per unir les tres c.f.c. resultants de trencar els seus H-subgrafs.

4. VÈRTEXS SENSE GIRS EN U

Suposat que un g.o.e.s. acompleix les tres condicions necessàries per a ésser U-eulerià esmentades a la secció anterior, veurem en aquesta secció en quins tipus de vèrtexs tenim la garantia que un tour eulerià amb mínim nombre de girs en U no hi realitzi girs en U. Per tal motiu necessitarem demostrar alguns resultats.

Teorema 6. *Sigui $G = (V,E)$ un g.o.e.s. i T un tour eulerià en ell. Existeix un tour eulerià T' en G que no realitza girs en U als vèrtexs i amb, bé $d^+(i) > 3$, bé $d^+(i) = 3$ i $U(i) = 1$, i que realitza els mateixos girs que T a la resta de vèrtexs.*

Demostració. Suposem que T realitza el gir en U $(j,i)(i,j)$ i que comença en aquest gir. Sigui $(u,i)(i,v)$ el gir següent per i de T. Considerem els dos casos de l'enunciat:

- Si $d^+(i) > 3$, existeix almenys un altre gir per i de T $(w,i)(i,k)$ amb $k \neq u$, que per l'ordre establert va després del $(u,i)(i,v)$. Si realitzem el 3-intercanvi

  $$\{(j,i)(i,j),(u,i)(i,v),(w,i)(i,k)\} \to \{(j,i)(i,v),(u,i)(i,k),(w,i)(i,j)\}$$

  obtenim un altre tour eulerià sobre G sense almenys el gir en U $(j,i)(i,j)$.
- Si $d^+(i) = 3$ i $U(i) = 1$, sigui $(w,i)(i,k)$ el tercer gir de T per realitzar en i, aquí és evident que $k \neq u$, per tant, si realitzem el mateix 3-intercanvi que al cas anterior, obtenim un altre tour eulerià sobre G sense el gir en U $(j,i)(i,j)$.

Si repetim aquest procediment les vegades que necessitem, obtindrem un tour eulerià T' en G que acompleix les condicions del teorema.

■

Per altra banda, a la Figura 6 donem les diferents formes en què pot aparèixer un vèrtex v amb $d^{+}(v) = 2$ i $U(v) = 1$ en un g.o.e.s. sense vèrtexs finals:

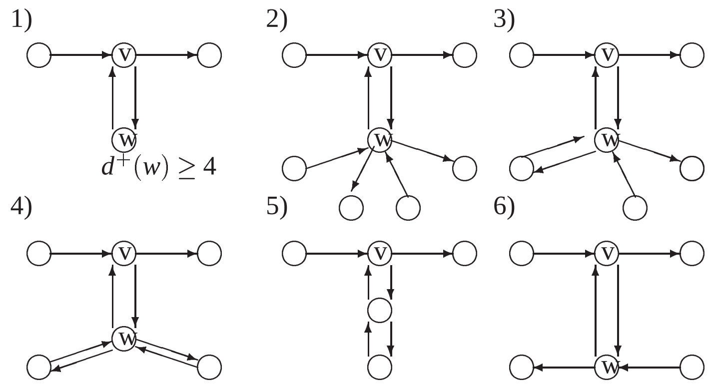

Figura 6. Formes en què pot apareixer un vèrtex v amb $d^{+}(v) = 2$ i $U(v) = 1$ en un g.o.e.s. sense vèrtexs finals.

En un tour eulerià amb mínim nombre de girs en U en un g.o.e.s., mai apareixerà un gir en U al vèrtex v als casos 1 i 2 de la Figura 6, ja que cas d'aparèixer en v un gir en U, si es creua amb l'altre gir per l'esmentat vèrtex, s'obtenen dos circuits que coincideixen al vèrtex w. A continuació, aquests dos circuits es poden unir en w i pel Teorema 6, un 3-intercanvi adequat faria desaparèixer els girs en U que es formaren en w.

Als casos 3 i 4 de la Figura 6, si apliquem la tècnica esmentada per als casos 1 i 2, si es formara un gir en U en w, un estudi detallat de totes les possibilitats ens diu que no tenim la garantia que un 3-intercanvi el fera desaparèixer.

El cas 5, ja que als vèrtexs interiors d'un camí maximal doble no es realitzen girs en U, es redueix a la resta de casos, depenent de l'altre vèrtex w, extrem del camí maximal doble que comença en v.

El cas 6 ha estat estudiat a la secció anterior.

D'allò que hem dit per als casos 1, 2 i 5 obtenim el resultat següent:

Teorema 7. *Sigui G=(V,A) un g.o.e.s. i sigui $v = u_0, u_1, \ldots, u_{k+1} = w$ un camí maximal doble en G, amb $k \geq 0$, $d^{+}(v) = 2$, $U(v) = 1$ i, bé $d^{+}(w) \geq 4$, bé $d^{+}(w) = 3$ i $U(w) = 1$. Cap tour eulerià amb mínim nombre de girs en U sobre G, realitza girs en U als vèrtexs d'aquest camí maximal doble.*

Per últim, el resultat següent ens permet eliminar més vèrtexs candidats a contenir girs en U en un tour eulerià sobre un g.o.e.s..

Teorema 8. *Sigui $G = (V,A)$ un g.o.e.s. i sigui $v \in V$ amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$ tal que existeixen almenys U(v)-1 vèrtexs u connectats a v en G per un camí maximal doble, u acomplint que, bé $d^+(u) \geq 4$, bé $d^+(u) = 3$ i $U(u) = 1$, bé $d^+(u) = 2$ i $U(u) = 1$ si —en aquest últim cas— u és un vèrtex de tall. Cap tour eulerià amb mínim nombre de girs en U sobre G, realitza girs en U en v.*

Demostració. Suposem que un tour eulerià amb mínim nombre de girs en U sobre G realitza un gir en U en v. Si un 3-intercanvi no elimina aquest gir en U en v, almenys el transforma (si cal fer el 3-intercanvi) en un altre gir en U $(u,v)(v,u)$ amb u pertanyent a un camí maximal doble d'un dels dos primers casos esmentats a l'enunciat del teorema (el tercer cas no es pot donar ja que el vèrtex extrem del camí maximal doble a què pertany u és de tall). Si creuem aquest gir en U amb un altre gir per v, obtindríem dos circuits que passen per l'altre vèrtex extrem del camí maximal doble a què pertany u (eventualment aquest vèrtex és el propi u). Si creuem ambdós circuits en aquest vèrtex extrem obtindríem un tour eulerià, que si hi tingués girs en U, es podrien desfer mitjançant 3-intercanvis adequats. En qualsevol cas arribem a contradicció per obtenir un tour eulerià amb menys girs en U.

■

Per tant, un tour eulerià amb mínim nombre de girs en U sobre un g.o.e.s. G, suposat G sense vèrtexs finals, amb almenys un vèrtex u amb $d^+(u) \neq 2$ o $U(u) \neq 2$, $H_G = 1$ i trencats tots els seus H-subgrafs, no realitzarà girs en U als tipus de vèrtexs següents, no necessàriament excloents:

(1) vèrtexs v amb $U(v) = 0$.

(2) vèrtexs v amb $d^+(v) > 3$.

(3) vèrtexs v amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) = 1$.

(4) vèrtexs v interiors d'un camí maximal doble.

(5) vèrtexs v amb $d^+(v) = 2$ i $U(v) = 1$ si v és vèrtex de tall (és evident).

(6) vèrtexs v amb $d^+(v) = 2$ i $U(v) = 1$ si v és vèrtex extrem d'un camí maximal doble que té per altre extrem un vèrtex del tipus (2) o (3).

(7) vèrtexs v amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$ si existeixen almenys $U(v) - 1$ vèrtexs connectats a v per un camí maximal doble i pertanyents a alguns dels tipus (2) (3) o (5).

Llavors, els únics vèrtexs on cal estudiar l'aparició de girs en U són aquells v amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$ si no són del tipus (7). Això dóna lloc a la condició suficient de graf orientat simple U-eulerià següent:

Teorema 9. *Sigui G=(V,A) un g.o.e.s. sense vèrtexs finals, amb almenys un vèrtex u amb $d^+(u) \neq 2$ o $U(u) \neq 2$ i amb $H_G = 1$. Si tot vèrtex $v \in V$ amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$ és del tipus (7), G és U-eulerià.*

En cas que un g.o.e.s. contingui vèrtexs v amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$ que no siguin del tipus (7), és quan farem servir el resultat de Thomassen (Teorema 1) en una condició suficient que abraça l'anterior.

5. CONDICIÓ SUFICIENT DE GRAF ORIENTAT SIMPLE U-EULERIÀ

Sigui $G = (V,A)$ un g.o.e.s., li associem dos grafs no orientats G' i G'' definits com segueix:

– $G' = (V,E')$ on l'aresta $(u,v) \in E'$ si i sols si $(u,v)(v,u) \in A$ (cada aresta de G' substitueix un parell d'arcs inversos en G).

– $G'' = (V,E'')$ on l'aresta $(u,v) \in E''$ si i sols si u i v són vèrtexs consecutius en un camí (eventualment cicle) $(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ a G tal que $d^+(u_1) = d^+(u_k) = 3$, $U(u_1) > 1$, $U(u_k) > 1$, si $k > 2$ $d^+(u_i) = U(u_i) = 2$ $i = 2,\ldots,k-1$, i tots els arcs d'aquest camí tenen invers (veure exemple en Figura 7).

Sigui $G = (V,A)$ un g.o.e.s., considerem també el conjunt M_G dels vèrtexs $v \in V$ que acompleixen:

1) $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$.

2) v és vèrtex extrem d'almenys un camí maximal doble amb l'altre vèrtex extrem w acomplint $d^+(w) = 2$, $U(w) = 1$ i w no és vèrtex de tall. Sigui $k(v)$ el nombre d'aquests camins.

3) Existeix un nombre inferior a $U(v) - 1$ de vèrtexs u connectats a v per un camí maximal doble, u acomplint, bé $d^+(u) \geq 4$, bé $d^+(u) = 3$ i $U(u) = 1$, bé $d^+(u) = 2$ i $U(u) = 1$ si -en aquest últim cas- u es vèrtex de tall.

4) Si $k(v) = 1$ i la component connexa a què pertany v en G'' no conté cap altre vèrtex acomplint 1), 2) i 3), aleshores, aquesta component conté un cicle.

M_G és, per tant, un subconjunt del conjunt de vèrtexs v amb $d^+(v) = 3$ i $U(v) > 1$ no del tipus (7), prou restringit per les condicions 2) i 4).

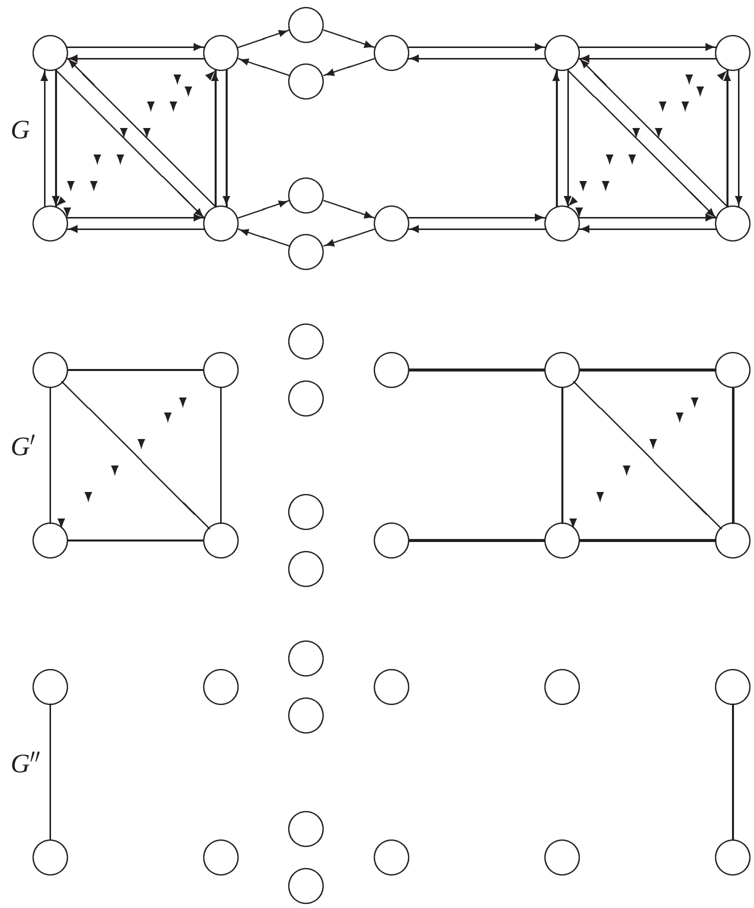

Figura 7

Teorema 10. *Sigui $G = (V,A)$ un g.o.e.s. sense vèrtexs finals, amb $H_G = 1$ i $M_G = \emptyset$. G és U-eulerià si cada component connexa G'_i de G' acompleix una de les dues condicions següents:*

(a) G'_i no és un cicle i admet un arbre generador T'_i tal que tota component connexa de $G'_i - T'_i$ conté un nombre parell d'arestes o un vèrtex de grau major que 3 en G'_i.

(b) *Cada component connexa G''_{i_k} de G'' continguda en G'_i, a més de no ser un cicle, admet un arbre generador T''_{i_k} tal que tota component connexa de $G''_{i_k} - T''_{i_k}$ conté un nombre parell d'arestes.*

Demostració. Cada component connexa G'_i (G''_{i_k}) de G' (G'') porta associada un subgraf G_i (G_{i_k}) de G generat per les parelles d'arcs inversos a les quals representen les seves arestes. Pel Teorema 1, si G'_i (G''_{i_k}) acompleix (a) ((b)), G_i (G_{i_k}) admet un tour eulerià T_i (T_{i_k}) que només realitza girs en U als seus vèrtexs finals.

Per altra banda, si G'_i no acompleix (a) però acompleix (b), per a cada G''_{i_k} continguda en G'_i, farem el següent: si existeix un camí maximal doble $u = u_0, u_1, \ldots, u_{r+1} = v$ amb $r \geq 0$ en G, acomplint que $u \in G''_{i_k}$ i u_t no pertanyent a cap G''_{i_t} $\forall t > 0$, siguin $w, s \in G''_{i_k}$ els vèrtexs adjacents a u en G''_{i_k} (eventualment $w = s$), ampliem T_{i_k} mitjançant la cadena $w, u, u_1, \ldots, v, u_k, \ldots, u, s$.

Una vegada realitzades totes aquestes ampliacions dels T_{i_k} als subgrafs G_{i_k} que ho precisen, es pot construir un tour eulerià T sobre G que absorbesca als T_j i als T_{i_k} afegint-li la resta d'arcs de G amb el mètode clàssic de recerca d'un circuit d'arcs no usats encara i creuament del mateix amb un altre circuit trobat anteriorment.

Per la forma de construir T, per allò esmentat a la secció anterior sobre els diversos tipus de vèrtexs i per les hipòtesis del teorema, creuaments de girs i 3-intercanvis adequats transformaran T en un tour eulerià que, com a màxim realitzarà girs en U als vèrtexs w que acompleixen $d^+(w) = 2$, $U(w) = 1$, w no és de tall i és vèrtex extrem d'un camí maximal doble amb l'altre vèrtex extrem v acomplint $d^+(v) = 3$, $U(v) > 1$ i v no és del tipus (7). Vegem que els girs en U en aquests vèrtexs també es poden eliminar.

En efecte, si T realitza un gir en U en un vèrtex w acomplint allò dit anteriorment, si creuem aquest gir amb l'altre gir per w, obtenim dos circuits que passen per v. Si creuem aquests dos circuits en v obtenim de nou un tour eulerià. Si aquest realitzés girs en U en v, amb un raonament similar al de la demostració del Teorema 8, amb 3-intercanvis i creuaments de girs adequats, podem, bé fer desaparèixer el gir en U, bé anar movent-lo a vèrtexs contigus. És evident que si no aconseguim que desapareixi, és perquè en anar movent-lo de vèrtex, s'ha format un cicle al subgraf de G'' a què pertany v o ha arribat a un vèrtex de les mateixes característiques que v. Això vol dir que $v \in M_G$, fet que és absurd ($M_G = \emptyset$).

Per tant, T es pot transformar en un tour U-eulerià.

■

De la mateixa demostració del Teorema 10 se segueix que, sota les hipòtesis d'aquest teorema, el tour U-eulerià es pot construir en temps polinomial.

Aquest teorema generalitza el Teorema 9 (les seves hipòtesis impliquen que G'' no conté cap cicle) i el Teorema 1 com a condició suficient (en aquest cas G' seria connex).

Si seguim l'exemple de la Figura 7, G' té dues components connexes. Mentre la component de la dreta acompleix la condició (a) del Teorema 10 (l'arbre es correspon amb les arestes més gruixudes), la de l'esquerra no acompleix (a), però G'' només té una component connexa continguda en ella, que per ser una aresta, és arbre i acompleix la condició (b). Així doncs, G és U-eulerià i un tour U-eulerià sobre ell ve donat en la Figura 8, tot seguint la numeració dels arcs. No entrem als detalls de la seva construcció, la qual fa ús de l'algorisme proposat per Benavent i Soler (1998a) per al cas particular esmentat a la secció 2.

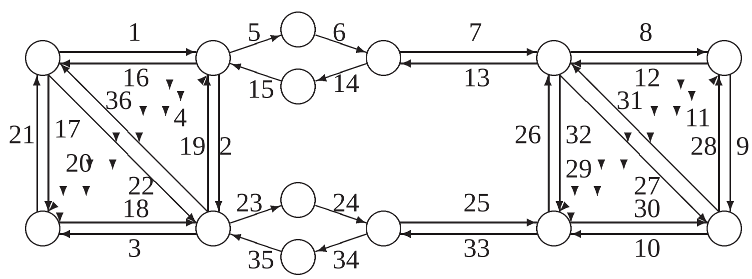

Figura 8. Tour U-eulerià sobre el graf orientat G de la Figura 7.

6. NOTES FINALS

En aquest article hem presentat el problema de trobar, si existeix, un tour eulerià sense girs en U (tour U-eulerià) sobre un graf orientat eulerià simple, el qual generalitza el problema polinomial del doble recorregut fort. Desconeguda la complexitat del nou problema, després d'un estudi detallat del diversos tipus de vèrtexs en un g.o.e.s., presentem al Teorema 10 una condició suficient de g.o.e.s. U-eulerià verificable en temps polinomial i que generalitza la donada per Thomassen (Teorema 1) per a l'existència d'un doble recorregut fort en un graf no orientat. A més a més, també donen una transformació del nou problema al Problema del Circuit Hamiltonià; d'aquesta manera, si no es compleixen les hipòtesis del Teorema 10, encara que en temps exponencial al pitjor del casos, podem saber si un g.o.e.s. és U-eulerià o no amb tècniques conegudes de Teoria de Grafs.

Encara que aquest article és netament teòric, pensem que els resultats i les tècniques aquí donades poden ser molt útils per evitar el major nombre possible de girs en U als vehicles, en problemes reals sobre xarxes de carrers o de carreteres, ja que com hem vist, si s'acompleixen les tres condicions necessàries donades a la secció 3, els girs en U només ocorrerien a determinats vèrtexs v amb $d^{+}(v) = 3$ i $U(v) > 1$, que si bé poden aparèixer en aquestes xarxes, tret de l'existència de vèrtexs pertanyents a M_G, poc probables en exemples reals, és molt difícil que es violi alguna de les condicions (a) o (b) del Teorema 10, i cas que es violés, l'algorisme per buscar un doble recorregut fort donat per Benavent i Soler (1998a) ens garanteix que (tot seguint el Teorema 10), si G'_i no acompleix (a) i G''_{i_k} no acompleix (b), donat un arbre generador T''_{i_k} de G''_{i_k}, només apareixeria un gir en U per cada component connexa de $G''_{i_k} - T''_{i_k}$ amb un nombre imparell d'arestes. També creiem que aquestes darreres components connexes són poc comuns als grafs provinents de problemes reals.

Pensant també en problemes reals, no volem deixar d'esmentar la possibilitat que el graf orient sigui simple, connex, però no eulerià i plantejar-nos, en aquest cas, la recerca d'un tour que recorri tots els seus arcs sense realitzar girs en U amb un cost extra mínim. Aquest problema és prou diferent al tractat aquí, ja que intervenen dos paràmetres: minimitzar costos al repetir arcs i evitar girs en U. Encara que el seu estudi teòric pugui ser interessant, aquest problema és un cas particular d'un altre amb més aplicacions pràctiques, anomenat Problema del Carter Rural Orientat amb Penalitzacions als Girs i Girs Prohibits i que consisteix a trobar un tour amb mínim cost que travessi determinats arcs evitant els girs prohibits (en particular girs en U). Aquest darrer problema ha estat estudiat per Benavent i Soler (1998b) tant des d'un punt de vista teòric com heurístic.

REFERÈNCIES

[1] **Benavent, E.** and **Soler, D.** (1998a). «Searching for a Strong Double Tracing in a Graph». *Top*, **6, 1**. 123-138.

[2] **Benavent, E.** and **Soler, D.** (1998b). «The Directed Rural Postman Problem with Turn Penalties». Pròxim a aparéixer a *Transportation Science*.

[3] **Brenner, J.L.** and **Lindon, B.C.** (1984). «Doubly Eulerian Trails on Rectangulars Grids». *Journal of Graph Theory*, **8**, 379-385.

[4] **Eggleton, R.B.** and **Skilton, D.K.** (1984). «Double Tracings of Graphs». *Ars Combinatoria*, **17A**, 307-323.

[5] **Fleischner, H.** (1983). «Eulerians Graphs». *Selected Topics in Graph Theory*, **2**, (Academic Press, London-New York) 17-53.

[6] **Gabow, H.N.** and **Stallmann, M.** (1986). «An Augmenting Path Algorithm for Linear Matroid Parity». *Combinatorica*, **6, 2**, 123-150.

[7] **Laporte, G.** (1992). «The Traveling Salesman Problem: An Overview of Exact and Aproximate Algorithms». *European Journal of Operational Research*, **59**, 231-247.

[8] **Ore, O.** (1951). «A Problem Regarding the Tracing of Graphs». *Elem. Math.*, **6, 3**, 49-53.

[9] **Thomassen, C.** (1990). «Bidirectional Retracting-free Double Tracing and Upper Embeddability of Graphs». *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **50, 2**, 198-207.

[10] **Troy, D.J.** (1966). «On Traversing Graphs». *Amer. Math. Monthly*, **73**, 497-499.

[11] **Xuong, N.H.** (1979). «How to Determine the Maximun Genus of a Graph». *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **26**, 217-225.

ENGLISH SUMMARY

EULERIAN TOUR WITHOUT U-TURNS IN A SIMPLE DIGRAPH

D. SOLER FERNÁNDEZ
Universitat Politècnica de Valencia*

Let $G = (V,A)$ *be a simple directed Eulerian graph, here we study if* G *admits an Eulerian tour without U-turns, that is, without traversing consecutively pairs of arcs* $(u,v),(v,u)$ $u,v \in V$*. This problem can be solved by transforming it into a Hamiltonian circuit problem, but we do not know its complexity despite our efforts, so in this paper we give a condition under which we can find, in polynomial time, an Eulerian tour without U-turns in G. To give this condition, on the one hand, we generalize a result about a particular case solved in polynomial time (the one known as the strong double tracing problem), on the other, we try to identify vertices in which an Eulerian tour with a minimum number of U-turns, will make no U-turns.*

Keywords: U-turn, U-Eulerian digraph, H-subgraph.

AMS Classification: 68R05,68R10

* Universitat Politècnica de València. Departament de Matemàtica Aplicada. Camí de Vera, 14. 46071 València.

– Received April 1997.
– Accepted Setember 1998.

Let $G = (V,A)$ be a simple Eulerian digraph, we study if it contains an Eulerian tour without U-turns (without traversing consecutively pairs of arcs $(u,v),(v,u)$, $u,v \in V$). Such a tour is called a U-Eulerian tour and if the answer is positive, we say that G is U-Eulerian.

We do not know the complexity of this problem, but we can solve it in exponential time by transforming it into a Hamiltonian Circuit Problem. The purpose of this paper is then, to give a simple sufficient condition that can be checked in polynomial time, to verify that a simple Eulerian digraph is U-Eulerian.

This condition makes use of a particular case solved in polynomial time, which occurs when the digraph G is the result of splitting each edge of a simple non directed graph G^* into two arcs of opposite direction. In this case, Thomassen (1990) proves that G is U-Eulerian iff G^* has no end-vertices and it contains a spanning tree T^* such that every connected component of $G^* - T^*$ has an even number of edges or contains a vertex v with $d(v) > 3$ in G^*. Checking the existence of tree T^* and constructing (if such be the case) the U-Eulerian tour, takes polynomial time.

Let $v \in V$, we denote by $U(v)$ the number of pairs of arcs $(u,v),(v,u)$, with u adjacent to v. We will suppose without loss of generality that G does not have vertices v with $d^+(v) = U(v) = 2$.

Let $u,v \in V$ with $d^+(v) = d^+(u) = 2$, $U(u) = U(v) = 1$ and $(u,v),(v,u) \in A$, we call H-subgraph, the subgraph of G formed by u,v, its incident arcs and its adjacent vertices. Breaking this H-subgraph means splitting u and v into two respective pairs of vertices $u', u"$ and $v', v"$ such that if $(u,v),(v,u),(u,k),(w,u),(s,v),(v,t) \in A$, we obtain two paths in G without common interior vertices $(s,v',u",k)$ and $(w,u',v",t)$. Let H_G be the number of connected components of G obtained by breaking all its H-subgraphs, if $H_G \neq 1$, then G is not U-Eulerian.

If $H_G = 1$ and G has no final vertices (vertices v with $d^+(v) = U(v) = 1$), then the only vertices that determine if an Eulerian tour in G with a minimum number of U-turns is not U-Eulerian, form a set of vertices v with $d^+(v) = 3$ and $U(v) > 1$ and, besides, there is a subset of such vertices, denoted by M_G which contains "very bad"vertices if U-turns are to be avoided.

Let $G' = (V,E')$ be a non directed graph such that $(u,v) \in E'$ iff $(u,v)(v,u) \in A$ and let $G" = (V,E")$ be another non directed graph such that $(u,v) \in E"$ iff $d^+(u) = d^+(v) = 3$, $U(u) > 1$, $U(v) > 1$ and $(u,v),(v,u) \in A$. The following theorem generalizes the result of Thomassen as a sufficient condition for a U-Eulerian simple digraph and can also be checked in polynomial time:

Theorem. *Let $G = (V,A)$ be a simple Eulerian digraph without final vertices, $H_G = 1$ and $M_G = \emptyset$. G is U-Eulerian if each connected componet G'_i of G' verifies one of the two following conditions:*

(a) *G'_i is not a cycle and it contains a spanning tree T'_i such that each connected component of $G'_i - T'_i$ contains an even number of edges or a vertex of degree greater than 3 in G'_i.*

(b) *Every connected component G''_{i_k} of G'' contained in G'_i is not a cycle and it has a spanning tree T''_{i_k} such that each connected component of $G''_{i_k} - T''_{i_k}$ contains an even number of edges.*