QÜESTIIÓ, vol. 25, 1, p. 71-90, 2001

EL ÍNDICE DE PODER DE BANZHAF EN LA UNIÓN EUROPEA AMPLIADA⋆

E. ALGABA
J. M. BILBAO
J. R. FERNÁNDEZ
J. J. LÓPEZ
Universidad de Sevilla*

En este trabajo se definen algoritmos, basados en funciones generatrices, para calcular el índice de poder de Banzhaf en juegos simples de votación ponderada y en juegos de doble y triple mayoría. La utilización de funciones generatrices permite un cálculo exacto del índice de Banzhaf con una reducción sensible de la complejidad temporal. Además se calculan los índices de Banzhaf para las reglas de decisión, aprobadas en la cumbre de Niza, que se utilizarán en la Unión Europea ampliada a 27 países. Finalmente, se demuestra que los sistemas de triple mayoría adoptados son equivalentes en la práctica a juegos de mayoría simple o doble, porque la cuota de población exigida para aprobar una decisión no cambia el índice de Banzhaf de los países de la Unión Europea ampliada.

The Banzhaf power index in the EU after the enlargement

Palabras clave: Funciones generatrices, índice de Banzhaf, juegos de votación

Clasificación AMS (MSC 2000): 91A12

⋆Este trabajo ha sido realizado con la ayuda del proyecto de investigación SEC2000–1243, del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

*Matemática Aplicada II. Escuela Superior de Ingenieros. Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla. http://www.esi2.us.es/˜mbilbao/.*E-mail:* mbilbao@cica.es,

–Recibido en enero de 2001.
–Aceptado en marzo de 2001.

1. INTRODUCCIÓN

Un *juego de votación ponderada* se define en un conjunto finito N de jugadores, que pueden ser individuos, empresas, grupos políticos, países, etc. Cada jugador $i \in N$ tiene un número de votos $w_i > 0$, por lo que cada coalición de jugadores $S \subseteq N$ reúne la suma de los votos de sus componentes $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Fijada una cuota q para adoptar decisiones, una coalición S es *ganadora* si $w(S) \geq q$, y es *perdedora* si $w(S) < q$. Dado que hay exactamente dos posibilidades para cada coalición de jugadores, un juego de votación ponderada es un *juego simple* $v : 2^N \to \{0,1\}$, definido por

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq q, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En consecuencia, un juego de votación ponderada se representa por

$$v \equiv [q;\, w_1, w_2, \ldots, w_n]\,.$$

El poder de un votante en el seno de una comisión o comité se define como su capacidad para influir en las decisiones aprobadas mediante un juego de votación ponderada. Los *índices de poder* son medidas «*a priori*» de dicho poder, basadas en calcular la capacidad de cada votante para participar en coaliciones ganadoras. Los más conocidos son los índices de Banzhaf (1965) y de Shapley-Shubik (1954). Ambos índices proporcionan una medida mucho más precisa del poder de un jugador que el número de votos que tiene derecho a emitir.

Otra cuestión que se plantea en un juego de votación es la siguiente: ¿Cómo se mide el poder de un jugador para bloquear una decisión? La respuesta a esta cuestión es que el poder de un jugador para bloquear una decisión es el mismo que tiene para aprobarla. Más precisamente, tanto el índice de Banzhaf como el de Shapley-Shubik coinciden en el juego de bloqueo y en el de aprobación. Por ello, ambos índices miden tanto la capacidad de un jugador para aprobar una propuesta como para bloquearla (ver Dubey y Shapley (1979)).

En este trabajo definiremos algoritmos para calcular el índice de poder de Banzhaf. En la sección segunda introducimos las *funciones generatrices* para resolver *el problema de contar* las coaliciones que cumplen determinadas propiedades. La sección tercera se dedica a la utilización de funciones generatrices para calcular el índice de Banzhaf. Los antecedentes de esta aproximación son los trabajos de Cantor (ver Lucas (1983)), Brams y Affuso (1976). Posteriormente, Tannenbaum (1997) elaboró algoritmos para calcular índices de poder en juegos de mayoría ponderada, usando el sistema Mathematica. Los sistemas de votación con doble y triple mayoría se introducen en la sección cuarta, en la que proponemos nuevos algoritmos para calcular los índices de Banzhaf para dichos juegos. En la última sección se presentan los resultados obtenidos al calcular el índice de Banzhaf para la Unión Europea ampliada a 27 países, usando las dos reglas de decisión aprobadas en la cumbre de Niza.

2. FUNCIONES GENERATRICES

Las funciones generatrices proporcionan un método para contar el número de elementos $c(k)$ de un conjunto finito, cuando estos elementos poseen una determinada configuración dependiente de una variable k. Dada una sucesión $\{c(k)\}_{k\geq 0}$ su función generatriz es la serie de potencias formal $f(x) = \sum_{k\geq 0} c(k)x^k$.

Es una serie formal porque no tenemos en cuenta su evaluación en valores particulares ni los problemas de convergencia. Así, por ejemplo, para cualquier número natural n el número de subconjuntos de k elementos de $N = \{1,2,\ldots,n\}$ viene dado por el coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Una función generatriz de los coeficientes binomiales es

$$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k.$$

En lo sucesivo, para simplificar la notación, $c(k)$ se escribirá como c_k. Por último, consideraremos funciones generatrices de varias variables, definidas por

$$f(x,y,z) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} c_{kjl}x^k y^j z^l.$$

3. EL ÍNDICE DE PODER DE BANZHAF

En primer lugar, introducimos el concepto de *swing*. Un swing para el jugador i es un par de coaliciones $(S\cup\{i\},S)$ tales que que $i \notin S$, la coalición $S\cup\{i\}$ es ganadora y S es perdedora. A partir de ahora, escribiremos $S\cup i$ en vez de $S\cup\{i\}$ y $S\setminus i$ en lugar de $S\setminus\{i\}$. Para cada jugador $i \in N$ se denota por $\eta_i(v)$ el número de swings para el jugador i en el juego (N,v), es decir, el número de coaliciones para las que el jugador i es decisivo. El número total de swings es $\overline{\eta}(v) = \sum_{i\in N}\eta_i(v)$, y el índice de poder de Banzhaf normalizado del jugador i viene dado por

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\overline{\eta}(v)}.$$

Sea $v \equiv [q;\, w_1,\ldots,w_n]$ un juego de votación ponderada. El número de swings del jugador i es

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i,$$

donde b_k^i es el número de coaliciones $S \subseteq N$ tales que $i \notin S$ y $w(S) = k$. Obsérvese que al sumar entre $q - w_i$ y $q - 1$ se obtendrá el número total de coaliciones que eran perdedoras y se convierten en ganadoras al incorporarse el jugador i. Brams y Affuso (1976) introducen la siguiente función generatriz

$$B_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j}) = \sum_{k=0}^{w(N\setminus i)} b_k^i x^k,$$

que nos permite calcular dichos números.

Ejemplo 1. Considérese el siguiente juego de votación ponderada en el actual pleno del Ayuntamiento de Sevilla:

$$N = \{1\,(PP),\ 2\,(PSOE),\ 3\,(PA),\ 4\,(IU)\}, \qquad v \equiv [17;\ 13, 12, 6, 2].$$

Para calcular el índice de poder de Banzhaf normalizado usando la definición hay que determinar primero el peso y el valor de cada coalición.

Coalición	$w(S)$	$v(S)$
$\emptyset$	0	0
$\{1\}$	13	0
$\{2\}$	12	0
$\{3\}$	6	0
$\{4\}$	2	0
$\{1,2\}$	25	1
$\{1,3\}$	19	1
$\{1,4\}$	15	0

Coalición	$w(S)$	$v(S)$
$\{2,3\}$	18	1
$\{2,4\}$	14	0
$\{3,4\}$	8	0
$\{1,2,3\}$	31	1
$\{1,2,4\}$	27	1
$\{1,3,4\}$	21	1
$\{2,3,4\}$	20	1
$\{1,2,3,4\}$	33	1

Las coaliciones S tales que $(S \cup \{i\}, S)$ es un swing para el jugador i son

Jugador	*Coaliciones*
1	$\{\{2\},\{3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$
2	$\{\{1\},\{3\},\{1,4\},\{3,4\}\}$
3	$\{\{1\},\{2\},\{1,4\},\{2,4\}\}$
4	$\emptyset$

Por tanto, el número de swings para cada jugador es

Jugador	$\eta_i(v)$
1	4
2	4
3	4
4	0

El número total de swings es $\overline{\eta}(v) = \sum_{i \in N} \eta_i(v) = 12$, y el índice de Banzhaf normalizado es $\beta(v) = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$.

Para calcular el índice de Banzhaf con funciones generatrices, hay que determinar en primer lugar las funciones $B_i(x) = \prod_{j=1,\, j \neq i} \left(1 + x^{w_j}\right)$.

$$
\begin{aligned}
B_1(x) &= \left(1+x^{12}\right)(1+x^6)(1+x^2) = 1+x^2+x^6+x^8+x^{12}+x^{14}+x^{18}+x^{20},\\
B_2(x) &= (1+x^{13})(1+x^6)(1+x^2) = 1+x^2+x^6+x^8+x^{13}+x^{15}+x^{19}+x^{21},\\
B_3(x) &= (1+x^{13})(1+x^{12})(1+x^2) = 1+x^2+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{25}+x^{27},\\
B_4(x) &= (1+x^{13})(1+x^{12})(1+x^6) = 1+x^6+x^{12}+x^{13}+x^{18}+x^{19}+x^{25}+x^{31}.
\end{aligned}
$$

El número de swings del jugador i se obtiene con

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i.$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\eta_1(v) &= \sum_{k=4}^{16} b_k^1 = 4, \quad \eta_2(v) = \sum_{k=5}^{16} b_k^2 = 4,\\
\eta_3(v) &= \sum_{k=11}^{16} b_k^3 = 4, \quad \eta_4(v) = \sum_{k=15}^{16} b_k^4 = 0.
\end{aligned}
$$

Finalmente, el número total de swings es

$$\overline{\eta}(v) = \sum_{i \in N} \eta_i(v) = 12,$$

y el índice de Banzhaf normalizado es $\beta(v) = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$.

En el ejemplo anterior, el número de coeficientes no nulos de los polinomios $B_i(x)$ está acotado por el número de coeficientes no nulos del polinomio

$$B(x) = \left(1+x^{13}\right)\left(1+x^{12}\right)\left(1+x^6\right)\left(1+x^2\right).$$

En general, para cualquier juego de votación ponderada $v \equiv [q;\, w_1, \ldots, w_n]$ el número c de coeficientes no nulos del polinomio $B(x)$ verifica

$$n+1 \leq c \leq \min\left(2^n, w(N)+1\right).$$

Si se conoce el número de coeficientes no nulos del polinomio $B(x)$ entonces se tiene una cota de la complejidad del problema. A continuación se incluyen tres ejemplos para aclarar esta cuestión.

Ejemplo 2. En el juego de votación $v \equiv [17;\ 13,12,6,2]$ del ejemplo anterior, el polinomio $B(x)$ viene dado por

$$B(x) = \left(1+x^{13}\right)\left(1+x^{12}\right)\left(1+x^{6}\right)\left(1+x^{2}\right).$$

Aquí se verifica que $c = 16$, $w(N)+1 = 34$ y $2^4 = 16$.

Ejemplo 3. La composición del Congreso de los Diputados de España, durante la Legislatura comprendida entre los años 1996 y 2000, era la siguiente:

1 (PP) 156 escaños	7 (BNG) 2 escaños
2 $(PSOE)$ 141 escaños	8 (HB) 2 escaños
3 (IU) 21 escaños	9 (ERC) 1 escaño
4 (CiU) 16 escaños	10 (EA) 1 escaño
5 (PNV) 5 escaños	11 (UV) 1 escaño
6 (CC) 4 escaños	

En dicha legislatura, el poder de los partidos en el Congreso se puede analizar mediante el juego simple de votación ponderada

$$v \equiv [176;\ 156,141,21,16,5,4,2,2,1,1,1].$$

El polinomio $B(x)$ viene dado por

$$\left(1+x^{156}\right)\left(1+x^{141}\right)\left(1+x^{21}\right)\left(1+x^{16}\right)\left(1+x^{5}\right)\left(1+x^{4}\right)\left(1+x^{2}\right)^2\left(1+x\right)^3,$$

y se verifica que $c = 177$, $w(N)+1 = 351$ y $2^{11} = 2048$.

Ejemplo 4. Considérese el juego de votación correspondiente a la toma de decisiones en el Consejo de la Unión Europea. El conjunto de jugadores lo forman los 15 países miembros:

$\{$Alemania, Reino Unido, Francia, Italia, España, Países Bajos, Grecia, Bélgica, Portugal, Suecia, Austria, Dinamarca, Finlandia, Irlanda, Luxemburgo$\}$.

Con los actuales votos, dicho juego se representa por

$$v \equiv [62;\ 10,10,10,10,8,5,5,5,5,4,4,3,3,3,2].$$

En este caso el polinomio $B(x)$ es

$$\left(1+x^{10}\right)^4\left(1+x^8\right)\left(1+x^5\right)^4\left(1+x^4\right)^2\left(1+x^3\right)^3\left(1+x^2\right),$$

y se verifica que $c = 86$, $w(N)+1 = 88$ y $2^{15} = 32768$.

Obsérvese que para determinar el índice de Banzhaf, en el juego de votación ponderada correspondiente al Consejo de la Unión Europea, hemos de analizar los coeficientes de 15 polinomios $B_i(x)$, uno para cada jugador, y el número de coeficientes no nulos de cada uno de estos polinomios se encuentra acotado por $c = 86$. Este número es la referencia a tener en cuenta para analizar la complejidad del problema usando funciones generatrices. En este caso, el número c es muy inferior al número total de coaliciones 2^{15}, lo que explica la utilidad del método de las funciones generatrices y la rapidez de los algoritmos que lo implementan. Usando el sistema Mathematica, el cálculo del índice de Banzhaf para el juego de votación ponderada correspondiente al Consejo de la Unión Europea, mediante funciones generatrices puede hacerse en menos de un segundo en cualquier computador personal.

En el juego de la Unión Europea, el número $c = 86$ es menor que el número $c = 177$ del juego del Congreso de los Diputados. Por ello, aunque la Unión Europea tiene más jugadores que el Congreso, el tiempo de cómputo del índice de Banzhaf, usando funciones generatrices, es menor en el juego de la Unión Europea.

4. JUEGOS CON DOBLE Y TRIPLE MAYORÍA

Uno de los acuerdos fundamentales de la cumbre de Jefes de Estado y de Gobierno de la Unión Europea, celebrada en Niza en el mes de diciembre de 2000, ha sido la aprobación de nuevos sistemas de votación de cara a la ampliación de la misma. Se han debatido diversos sistemas de votación para regular el funcionamiento del Consejo de la Unión Europea, aprobándose dos modelos de triple mayoría con una reponderación de los votos actuales.

Dados dos juegos simples $v_1, v_2 : 2^N \to \{0,1\}$, Dubey (1975) define el juego simple $(v_1 \wedge v_2)(S) = \min\{v_1(S), v_2(S)\}$ para usar el axioma de transferencia en la caracterización del valor de Shapley para juegos simples. Si $v_1 \equiv [q;\, w_1, \ldots, w_n]$ y $v_2 \equiv [p;\, p_1, \ldots, p_n]$ son juegos de votación, entonces el juego de votación con *doble mayoría* $v_1 \wedge v_2$ verifica:

$$(v_1 \wedge v_2)(S) = \min\{v_1(S), v_2(S)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq q \text{ y } p(S) \geq p, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El juego de votación ponderada con *triple mayoría* se define como la composición de tres juegos, dada por

$$(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(S) = \min\{v_1(S), v_2(S), v_3(S)\}.$$

En estos juegos de votación de doble o triple mayoría, el índice de Banzhaf se define de la misma forma,

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\overline{\eta}(v)},$$

y en consecuencia debemos calcular, para cada jugador i, su número de swings. Este número se puede calcular considerando el conjunto de coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador i y, dentro de él, el subconjunto de coaliciones en las que no sea necesaria su presencia para que sean ganadoras. En un juego de doble mayoría, el número de swings del jugador i viene dado por la fórmula

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p-p_i}^{p(N\backslash i)} b_{kr}^i - \sum_{k=q}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p}^{p(N\backslash i)} b_{kr}^i,$$

donde b_{kr}^i es el número de coaliciones S que no incluyen al jugador i tales que $w(S) = k$ y $p(S) = r$ (véase Fernández García (2000)). En este caso, el cálculo de los números $\{b_{kr}^i\}_{k\geq 0, r\geq 0}$ para cada jugador $i \in N$ puede hacerse a partir de la siguiente función generatriz:

$$B_i(x,y) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j} y^{p_j}) = \sum_{k=0}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=0}^{p(N\backslash i)} b_{kr}^i x^k y^r.$$

El número c de coeficientes no nulos de $B(x,y) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x^{w_j} y^{p_j})$ verifica

$$n + 1 \leq c \leq \min(2^n, w(N)\, p(N) + 1),$$

lo que nos da una medida de la complejidad del problema. La complejidad temporal de estos algoritmos ha sido estudiada por Bilbao, Fernández García, Jiménez-Losada y López (2000).

Ejemplo 5. En un organismo del Ayuntamiento de Sevilla formado por un representante de cada uno de los partidos con representación municipal, los acuerdos se toman con la mayoría absoluta de sus miembros, los cuales, además, deben representar la mayoría absoluta de los concejales. Entonces se trata del juego de doble mayoría $v_1 \wedge v_2$, donde $v_1 \equiv [17;\ 13, 12, 6, 2]$ y $v_2 \equiv [3;\ 1, 1, 1, 1]$. Toda coalición ganadora en v_2 es ganadora en v_1, luego $v_2(S) \leq v_1(S)$ para toda coalición $S \subseteq N$. Entonces el juego $v_1 \wedge v_2 = v_2$ y su índice de Banzhaf es $\beta(v_2) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ porque los cuatro jugadores son simétricos. Su función característica es

$$(v_1 \wedge v_2)(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq 17 \text{ y } p(S) \geq 3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos las funciones $B_i(x,y) = \prod_{j=1,j\neq i}^{n} \left(1 + x^{w_j} y^{p_j}\right)$.

$$\begin{aligned}
B_1(x,y) &= 1 + x^2y + x^6y + x^8y^2 + x^{12}y + x^{14}y^2 + x^{18}y^2 + x^{20}y^3, \\
B_2(x,y) &= 1 + x^2y + x^6y + +x^{13}y + x^8y^2 + x^{15}y^2 + x^{19}y^2 + x^{21}y^3, \\
B_3(x,y) &= 1 + x^2y + x^{12}y + x^{13}y + x^{14}y^2 + x^{15}y^2 + x^{25}y^2 + x^{27}y^3, \\
B_4(x,y) &= 1 + x^6y + x^{12}y + x^{13}y + x^{18}y^2 + x^{19}y^2 + x^{25}y^2 + x^{31}y^3.
\end{aligned}$$

Para calcular los swings de cada jugador se calcula la diferencia

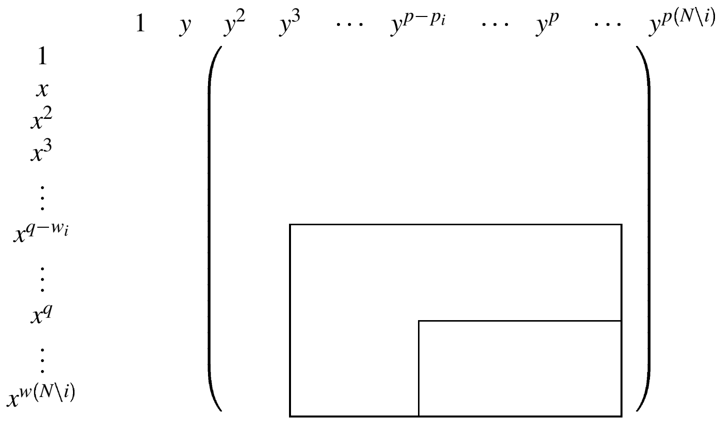
$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{w(N\setminus i)} \sum_{r=p-p_i}^{p(N\setminus i)} b_{kr}^i - \sum_{k=q}^{w(N\setminus i)} \sum_{r=p}^{p(N\setminus i)} b_{kr}^i,$$

y se obtienen los swings

$$\begin{aligned}
\eta_1(v) &= \sum_{k=4}^{20} \sum_{r=2}^{3} b_{kr}^1 - \sum_{k=17}^{20} \sum_{r=3}^{3} b_{kr}^1 = 4 - 1 = 3, \\
\eta_2(v) &= \sum_{k=5}^{21} \sum_{r=2}^{3} b_{kr}^2 - \sum_{k=17}^{21} \sum_{r=3}^{3} b_{kr}^2 = 4 - 1 = 3, \\
\eta_3(v) &= \sum_{k=11}^{27} \sum_{r=2}^{3} b_{kr}^3 - \sum_{k=17}^{27} \sum_{r=3}^{3} b_{kr}^3 = 4 - 1 = 3, \\
\eta_4(v) &= \sum_{k=15}^{31} \sum_{r=2}^{3} b_{kr}^4 - \sum_{k=17}^{31} \sum_{r=3}^{3} b_{kr}^4 = 4 - 1 = 3.
\end{aligned}$$

Como el número total de swings es $\overline{\eta}(v) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(v) = 12$, tenemos que el índice de Banzhaf es $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

Con objeto de facilitar el cálculo de los coeficientes $\left\{b_{kr}^i\right\}_{k\geq 0,\, r\geq 0}$ necesarios para determinar el número de swings, se pueden utilizar tablas para representar los polinomios $B_i(x,y)$. Así, el almacenamiento en una matriz de los coeficientes del polinomio $B_i(x,y)$ sería de la forma que se indica en la siguiente figura, pudiendo intuirse claramente que el cálculo del número de swings vendrá dado por la diferencia entre las sumas de todos los elementos de cada una de las submatrices resaltadas.



Por ejemplo, el almacenamiento en una matriz de los coeficientes del polinomio

$$B_1(x,y) = 1 + x^2y + x^6y + x^8y^2 + x^{12}y + x^{14}y^2 + x^{18}y^2 + x^{20}y^3$$

es como se indica a continuación. Los swings del jugador 1 se obtendrían a partir de los bloques señalados.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \\ x^7 \\ x^8 \\ x^9 \\ x^{10} \\ x^{11} \\ x^{12} \\ x^{13} \\ x^{14} \\ x^{15} \\ x^{16} \\ x^{17} \\ x^{18} \\ x^{19} \\ x^{20} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & y & y^2 & y^3 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \end{array}$$

Observemos que el elemento que ocupa la posición $(k+1, r+1)$ en la matriz coincide con el coeficiente b^1_{kr} del polinomio $B_1(x,y) = \sum_{k=0}^{20} \sum_{r=0}^{3} b^1_{kr} x^k y^r$.

Una vez construida la matriz, para calcular el número de swings del jugador i se determina primero el cardinal del conjunto de coaliciones ganadoras a las que pertenece dicho jugador,

$$s^i_1 = \sum_{k=q-w_i}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p-p_i}^{p(N\backslash i)} b^i_{kr},$$

el cual puede obtenerse sumando los elementos no nulos del bloque constituido por las filas que van desde la $q-w_i+1$ hasta la $w(N \setminus i)+1$ y por las columnas comprendidas entre la $p-p_i+1$ hasta la columna $p(N \setminus i)+1$, ambas inclusive. Seguidamente, se determina el cardinal del subconjunto de coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador i pero en las que su presencia no es necesaria para que sean ganadoras,

$$s^i_2 = \sum_{k=q}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p}^{p(N\backslash i)} b^i_{kr}.$$

Este cardinal puede obtenerse sumando los elementos no nulos del bloque constituido por las filas que van desde la $q+1$ hasta $w(N \setminus i)+1$ y por las columnas comprendidas entre la $p+1$ hasta la columna $p(N \setminus i)+1$, ambas inclusive. Por último, el número de swings del jugador i se obtiene evaluando la diferencia

$$\eta_i = s^i_1 - s^i_2.$$

Este método se extiende a juegos de triple mayoría, obteniéndose fórmulas y algoritmos semejantes (ver Bilbao, Fernández García y López (2001a), (2001b)).

5. LAS REGLAS DE NIZA

En esta sección presentamos los resultados obtenidos al calcular los índices de poder de Banzhaf para la Unión Europea ampliada a 27 países, usando las dos reglas de decisión que se han aprobado en la cumbre de Niza celebrada del 7 al 9 de Diciembre de 2000. Los jugadores son:

$\{$Alemania, Reino Unido, Francia, Italia, España, Polonia, Rumanía, Países Bajos,

Grecia, Rep. Checa, Bélgica, Hungría, Portugal, Suecia, Bulgaria, Austria,

Rep. Eslovaca, Dinamarca, Finlandia, Irlanda, Lituania, Letonia, Eslovenia,

Estonia, Chipre, Luxemburgo, Malta$\}$.

La primera regla de decisión es el juego triple $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$, donde los juegos de votación ponderada correspondientes a votos, países y población son los siguientes:

$v_1 \equiv [255;\ 29,29,29,29,27,27,14,13,12,12,12,12,12,10,10,10,7,7,7,7,7,4,4,4,4,4,3]$,

$v_2 \equiv [14;\ 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$,

$v_3 \equiv [620;\ 170,123,122,120,82,80,47,33,22,21,21,21,21,18,17,17,11,11,11,8,8,5,4,3,2,1,1]$.

El juego v_3 se define asignando a cada país un número de votos igual al tanto por mil de su población sobre la población total, y la cuota representa el 62% de la población total. Así, una votación será favorable cuando la respalden 14 países con al menos 255 votos y con al menos el 62% de población.

La segunda regla de decisión es el juego triple $v_1 \wedge v_2' \wedge v_3$, donde el juego de votación ponderada v_2' consiste en una mayoría cualificada de $2/3$ de los países, es decir,

$v_2' \equiv [18;\ 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$.

A continuación presentamos una tabla que contiene los índices de poder de Banzhaf de los países si se usa la primera regla de decisión. En la columna *I.Pob.* se incluye el porcentaje de población sobre el total, y en la columna *I. Votos* el porcentaje de votos de cada país sobre el total. Los índices de Banzhaf del juego v_1 se incluyen en la columna *Poder UE1*, y los índices de Banzhaf del juego triple $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ en la columna *Poder UE3*.

Tabla 1. El Poder en la Unión Europea.

Países	Población	Votos	I. Pob.	I. Votos	Poder UE1	Poder UE3
Alemania	82.038	29	0.170	0.084	0.0778	0.0778
Reino Unido	59.247	29	0.123	0.084	0.0778	0.0778
Francia	58.966	29	0.123	0.084	0.0778	0.0778
Italia	57.612	29	0.120	0.084	0.0778	0.0778
España	39.394	27	0.082	0.078	0.0742	0.0742
Polonia	38.667	27	0.080	0.078	0.0742	0.0742
Rumanía	22.489	14	0.047	0.041	0.0426	0.0426
Países Bajos	15.760	13	0.033	0.038	0.0397	0.0397
Grecia	10.533	12	0.022	0.035	0.0368	0.0368
R. Checa	10.290	12	0.021	0.035	0.0368	0.0368
Bélgica	10.213	12	0.021	0.035	0.0368	0.0368
Hungría	10.092	12	0.021	0.035	0.0368	0.0368
Portugal	9.980	12	0.021	0.035	0.0368	0.0368
Suecia	8.854	10	0.018	0.029	0.0309	0.0309
Bulgaria	8.230	10	0.017	0.029	0.0309	0.0309
Austria	8.082	10	0.017	0.029	0.0309	0.0309
R. Eslovaca	5.393	7	0.011	0.020	0.0218	0.0218
Dinamarca	5.313	7	0.011	0.020	0.0218	0.0218
Finlandia	5.160	7	0.011	0.020	0.0218	0.0218
Irlanda	3.744	7	0.008	0.020	0.0218	0.0218
Lituania	3.701	7	0.008	0.020	0.0218	0.0218
Letonia	2.439	4	0.005	0.012	0.0125	0.0125
Eslovenia	1.978	4	0.004	0.012	0.0125	0.0125
Estonia	1.446	4	0.003	0.012	0.0125	0.0125
Chipre	0.752	4	0.002	0.012	0.0125	0.0125
Luxemburgo	0.429	4	0.001	0.012	0.0125	0.0125
Malta	0.379	3	0.001	0.009	0.0094	0.0094

A partir de la tabla 1 extraemos las siguientes conclusiones:

- La primera regla de decisión, que consiste en un sistema de triple mayoría, es equivalente al primer juego de mayoría cualificada. El poder de todos los países es prácticamente el mismo con el juego simple v_1, con el juego doble $v_1 \wedge v_2$ y con el juego triple $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$.
- La segunda regla de decisión, que difiere de la primera en exigir la aprobación de al menos $2/3$ de los países, es equivalente al juego de doble mayoría $v_1 \wedge v_2'$. En esta regla, la cuota de población exigida para aprobar una decisión no cambia el poder de los países.
- Francia ha conseguido su objetivo, pues tiene el mismo poder que Alemania con las dos reglas de decisión aprobadas.
- Alemania, el Reino Unido, Francia e Italia tienen un índice de poder igual a 0.0778, que es claramente inferior a sus respectivos índices de población.
- Las dos reglas de decisión penalizan a Alemania, si se usa el criterio de comparar su índice de poder (0.0778) con su índice de población (0.170).
- La posición de España es muy equilibrada: su índice de Banzhaf es 0.0742 y su índice de votos es 0.078, con un índice de población de 0.082. La posición de Polonia es idéntica a la de España.
- Rumanía tiene un índice de votos y un índice de poder que se encuentran por debajo de su índice de población. A los Países Bajos les sucede lo contrario: su índice de votos y su índice de poder son superiores a su índice de población.
- Los demás países tienen un índice de poder superior a sus índices de población y votos. El más beneficiado es Luxemburgo: tiene un índice de Banzhaf de 0.0125 con un índice de población de 0.0009.

El poder de los países que formarán la Unión Europea ampliada se ha calculado en base a las ponderaciones de votos contenidas en el Tratado de Niza. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que este modelo puede enriquecerse modelando las preferencias de los países en el proceso de formación de coaliciones.

En ese caso el poder de dichos países podría calcularse usando valores restringidos, como el valor de Myerson (1977) para situaciones de comunicación modeladas por grafos y el valor de Owen (1977) para particiones en bloques del conjunto de los países de la Unión Europea ampliada.

En un juego con 27 jugadores, el número total de coaliciones que pueden formarse es $2^{27} = 134217728$. Por ello, las argumentaciones «*ad hoc*» del tipo «tres grandes bloquean», basadas únicamente en el análisis de media docena de coaliciones ganadoras, carecen de fundamento racional.

Por ejemplo: para el juego simple v_1 con la cuota $q = 255$, que denominamos *Juego UE1*, el número total de swings es 28186428; y para el juego de triple mayoría $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ (votos, mayoría de países y más del 62% de la población) que denominamos *Juego UE3*, el número de swings es 28186324. La diferencia es insignificante: sólo 104 swings sobre un total de más de 28 millones.

En la siguiente tabla se incluye el número de swings para cada país en ambos juegos.

Tabla 2. Número de swings.

Países	Juego UE1	Juego UE3	Diferencia
Alemania	2193664	2193654	-10
Reino Unido	2193664	2193650	-14
Francia	2193664	2193650	-14
Italia	2193664	2193650	-14
España	2091380	2091358	-22
Polonia	2091380	2091358	-22
Rumanía	1200504	1200482	-22
Países Bajos	1120138	1120116	-22
Grecia	1038492	1038476	-16
Rep. Checa	1038492	1038476	-16
Bélgica	1038492	1038476	-16
Hungría	1038492	1038476	-16
Portugal	1038492	1038476	-16
Suecia	871654	871654	0
Bulgaria	871654	871654	0
Austria	871654	871654	0
Rep. Eslovaca	614702	614712	10
Dinamarca	614702	614712	10
Finlandia	614702	614712	10
Irlanda	614702	614712	10
Lituania	614702	614712	10
Letonia	352374	352384	10
Eslovenia	352374	352384	10
Estonia	352374	352384	10
Chipre	352374	352384	10
Luxemburgo	352374	352384	10
Malta	265568	265584	16

El incremento del poder de Alemania, con respecto al Reino Unido, Francia e Italia en el juego de triple mayoría $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ es insignificante: la diferencia es de 4 swings sobre un total de más de 28 millones. Respecto al juego de triple mayoría $v_1 \wedge v_2' \wedge v_3$, la diferencia es también de 4 swings a favor de Alemania, sobre un total de más de 24 millones y medio de swings. En consecuencia, la diferencia entre los índices de Banzhaf de Alemania y del Reino Unido, Francia e Italia son, respectivamente, menores que 1.4×10^{-7} y 1.6×10^{-7}.

Los algoritmos y los índices de poder obtenidos para la Unión Europea de 15 y 27 países, con la nueva reponderación de votos aprobada en Niza, están contenidos en los dos *notebook* del sistema Mathematica elaborados por Bilbao, Fernández García y López (2001a), (2001b).

La principal conclusión que se obtiene de los cálculos realizados es que *las dos reglas de triple mayoría aprobadas en la cumbre de Niza son equivalentes en la práctica a un juego de mayoría simple (la primera) o doble (la segunda).* Con ambas reglas, la cuota de población exigida para aprobar una decisión no cambia el índice de poder de Banzhaf normalizado de los países de la Unión Europea ampliada.

6. CONTRADICCIONES EN EL TRATADO DE NIZA

El Tratado de Niza contiene la *Declaración relativa a la ampliación de la Unión Europea* y la *Declaración relativa al umbral de la mayoría cualificada y al número de votos de la minoría de bloqueo*. En estos acuerdos se establecen disposiciones que son contradictorias entre sí. En la página 162 del Tratado, después del cuadro con la ponderación de los votos en el Consejo de 27 países, se dice textualmente:

> «Para su adopción, los acuerdos del Consejo requerirán al menos 258 votos que representen la votación favorable de la mayoría de los miembros, cuando en virtud del presente Tratado deban ser adoptados a propuesta de la Comisión. En los demás casos, requerirán al menos 258 votos que representen la votación favorable de dos tercios de los miembros como mínimo.»

En consecuencia, la mayoría cualificada de 258 votos sobre un total de 345 votos representa un porcentaje del 74,78 por ciento. En la página 165 del Tratado se establece que:

> «En la medida en que todos los Estados candidatos que figuran en la lista incluida en la Declaración relativa a la ampliación de la Unión Europea

> no se hayan adherido todavía a la Unión cuando entren en vigor las nuevas ponderaciones de votos (1 de enero de 2005), el umbral de la mayoría cualificada evolucionará en función del ritmo de las adhesiones, a partir de un porcentaje inferior al porcentaje actual hasta alcanzar un máximo del 73,4%. Cuando se hayan adherido todos los Estados candidatos anteriormente mencionados, la minoría de bloqueo, en una Unión de 27, pasará a 91 votos y el umbral de la mayoría cualificada resultante del cuadro que figura en la Declaración relativa a la ampliación de la Unión Europea será adaptado en consecuencia automáticamente.»

Cuando se hayan adherido todos los Estados candidatos, el total de votos en el Consejo será de $n = 345$. Por tanto, una minoría de bloqueo de $b = 91$ votos implicará automáticamente una mayoría cualificada de $q = n+1-b = 255$ votos, que es el 73,91 por ciento de los votos. En consecuencia:

1. Las dos mayorías cualificadas de 258 y 255 votos, aprobadas en el Tratado de Niza para el Consejo de 27 países, superan el porcentaje máximo del 73,4 por ciento, fijado en la Declaración relativa al umbral de la mayoría cualificada.
2. La mayoría cualificada de 258 votos *no podrá aplicarse nunca*. La razón es que la adhesión de todos los candidatos obliga a fijar la minoría de bloqueo en 91 votos y la mayoría cualificada en 255 votos. En el caso de que no se hayan producido todas las adhesiones, el umbral de la mayoría deberá ser menor o igual que el 73,4 por ciento de un máximo de 342 votos (345 menos 3). Es decir, será menor o igual que 251 votos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen las correcciones y sugerencias de dos evaluadores anónimos que han contribuido a mejorar y completar este trabajo.

REFERENCIAS

Banzhaf III, J. F. (1965). «Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis». *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.

Bilbao, J. M., Fernández García, J. R. & López, J. J. (2001*a*). «Nice rules and voting power in the 15-European Union». Notebook contenido en `http://www.esi2.us.es/˜mbilbao/notebook/eu15nice.pdf`

—— (2001*b*). «Nice rules and voting power in the 27-European Union». Notebook contenido en `http://www.esi2.us.es/˜mbilbao/notebook/eu27nice.pdf`

Bilbao, J. M., Fernández García, J. R., Jiménez-Losada A. & López, J. J. (2000). «Generating functions for computing power indices efficiently». *TOP*, 8(2) 191-213.

Brams, S. J. & Affuso, P. J. (1976). «Power and Size: A New Paradox». *Theory and Decision*, 7, 29-56.

Dubey, P. (1975). «On the uniqueness of the Shapley value». *International Journal of Game Theory*, 4, 131-139.

Dubey, P. & Shapley, L. S. (1979). «Mathematical properties of the Banzhaf power index». *Mathematics of Operations Research*, 4, 99-131.

Fernández García, J. R. (2000). *Complejidad y algoritmos en juegos cooperativos.* Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.

Lucas, W. F. (1983). «Measuring Power in Weighted Voting Systems». En: Brams, Lucas, Straffin (Eds.), *Political and related models*, Springer-Verlag, New York, pp. 183-238.

Myerson, R. B. (1977). «Graphs and cooperation in games». *Mathematics of Operations Research*, 2, 225-229.

Owen, G. (1977). «Values of Games with a priori Unions». En: Henn, Moeschlin (Eds.), *Mathematical Economics and Game Theory*, Springer-Verlag, New York, pp. 76-88.

Shapley, L. S. & Shubik, M. (1954). «A method for evaluating the distribution of power in a committee system». *American Political Science Review*, 48, 787-792.

Tannenbaum, P. (1997). «Power in Weighted Voting Systems». *The Mathematica Journal* 7, 58-63.

ENGLISH SUMMARY

THE BANZHAF POWER INDEX IN THE EU AFTER THE ENLARGEMENT⋆

E. ALGABA
J. M. BILBAO
J. R. FERNÁNDEZ
J. J. LÓPEZ
Universidad de Sevilla*

The purpose of this paper is to compute the Banzhaf power index for weighted voting games as well as weighted double and triple majority games. We calculate the Banzhaf index in an exact way by generating functions, with a significant decrease of the computational complexity. Moreover, the Banzhaf indices are calculated for the decision rules approved in the Nice summit meeting, which will be used in the European Union enlarged to 27 countries. Finally, we show that the triple majority systems adopted are equivalent to weighted simple or double majority games, because the required population quota to approve a decision does not changes the Banzhaf power of the countries.

Keywords: Generating fuctions, Banzhaf power index, voting games

AMS Classification (MSC 2000): 91A12

⋆Este trabajo ha sido realizado con la ayuda del proyecto de investigación SEC2000–1243, del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

* Matemática Aplicada II. Escuela Superior de Ingenieros. Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla. http://www.esi2.us.es/˜mbilbao/. *E-mail:* mbilbao@cica.es,

– Received January 2001.
– Accepted March 2001.

A *weighted voting game* is defined on a finite set N of players. Each player $i \in N$ has a number of votes $w_i > 0$, so each coalition of players $S \subseteq N$ has the sum of votes of its components $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Fixed a quota q to take decisions, a coalition S is *winning* si $w(S) \geq q$, and is *losing* if $w(S) < q$. A weighted voting game is a simple game $v : 2^N \to \{0,1\}$ defined by $v(S) = 1$ if $w(S) \geq q$, and $v(S) = 0$ otherwise. Consequently, a weighted voting game is represented by the following scheme

$$v \equiv [q;\ w_1, w_2, \ldots, w_n].$$

The power of a player is defined as its capacity to influence in the decisions adopted by a weighted voting game. The *power indices* are measures «*a priori*» of this power, based on computing the capacity of each player to participate in winning coalitions. There are two well-known power indices, the Banzhaf index (Banzhaf, 1965) and the Shapley-Shubik index (Shapley and Shubik, 1954). Both of them give a measure more precise of the power of a player that the number of votes that this player has assigned.

In this work, we focus on computing the Banzhaf index by generating functions. This allows to obtain some conclusions about the power of the countries under the Nice rules. The starting point of this approach are in works due to Cantor (see Lucas (1983)), Brams and Affuso (1976) and Tannenbaum (1997).

A *swing* for player i is a pair of coalitions $(S \cup \{i\}, S)$ such that $i \notin S$, the coalition $S \cup \{i\}$ is winning and S is losing. For each player $i \in N$ is denoted by $\eta_i(v)$ the number of swings for player i in the game (N, v) . The total number of swings is $\overline{\eta}(v) = \sum_{i \in N} \eta_i(v)$, and the Banzhaf power index normalized of player i is given by

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\overline{\eta}(v)}.$$

Let $v = [q;\ w_1, \ldots, w_n]$ be a weighted voting game. The number of swings of player i is

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i,$$

where b_k^i the number of coalitions $S \subseteq N$ such that $i \notin S$ and $w(S) = k$. Note that summing from $q - w_i$ to $q - 1$ is obtained the total number of coalitions that were losing and become in winning when is incorporated player i. Brams and Affuso (1976) introduce the following generating function

$$B_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (1 + x^{w_j}) = \sum_{k=0}^{w(N \setminus i)} b_k^i x^k,$$

that allows to compute these numbers. Given two weighted voting games $v_1 = [q;\ w_1, \ldots, w_n]$ and $v_2 = [p;\ p_1, \ldots, p_n]$, the weighted *double majority* game $v_1 \wedge v_2$, satisfies

$$(v_1 \wedge v_2)(S) = \min\{v_1(S), v_2(S)\} = \begin{cases} 1 & \text{if } w(S) \geq q \text{ and } p(S) \geq p, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Similarly, a weighted *triple majority* game is defined by

$$(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)(S) = \min\{v_1(S), v_2(S), v_3(S)\}.$$

For a weighted double majority game the number of swings of player i is

$$\eta_i(v) = \sum_{k=q-w_i}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p-p_i}^{p(N\backslash i)} b^i_{kr} - \sum_{k=q}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p}^{p(N\backslash i)} b^i_{kr},$$

where b^i_{kr} is the number of coalitions S that do not include player i such that $w(S) = k$ and $p(S) = r$ (see Fernández García (2000)). In this case, the computation of the numbers $\{b^i_{kr}\}_{k,r\geq 0}$, for every player $i \in N$, can be done from the following generating function

$$B_i(x,y) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j} y^{p_j}) = \sum_{k=0}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=0}^{p(N\backslash i)} b^i_{kr} x^k y^r.$$

Taking into account that the two decision rules approved in the Nice summit are triple majority voting games, we introduce new algorithms to calculate the Banzhaf index for these games. We next present some results concerning to the Banzhaf power indices for the European Union enlarged to 27 countries. We compute these indices under the two decision rules adopted in the Nice European Union summit, held from in December, 2000. We obtain the following conclusions:

1. The first decision rule, that consists of a triple majority system, is equivalent to the first game of qualified majority. The power of all countries is almost the same as the power with the simple game v_1, with the double game $v_1 \wedge v_2$, and with the triple one $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$.

2. The second decision rule, that differs from the first one because it requires the approval at least of $2/3$ of the countries, is equivalent to the weighted double majority game $v_1 \wedge v_2'$. In this rule, the required population quota to adopt a decision does not change the power of the countries.

3. Germany has the same power that the United Kingdom, France and Italy, in the first weighted triple majority game: the difference is only 4 swings with respect to 28 millions. Concerning to the second weighted triple majority game the difference is also 4 swings in favor of Germany, over 24 millions and a half of swings. Consequently, the distinction between the Banzhaf indices of Germany and United Kingdom, France and Italy are, respectively, smaller than 1.4×10^{-7} and 1.6×10^{-7}.

Finally, we conclude with some contradictions found in the Treaty of Nice.