

DETECCIÓN DE M SEÑALES GAUSSIANAS UTILIZANDO EL DESARROLLO MODIFICADO DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO*

JESÚS NAVARRO-MORENO
JUAN CARLOS RUIZ-MOLINA
Universidad de Jaén*

Utilizando el desarrollo modificado de un proceso estocástico se propone una nueva metodología, alternativa a la basada en el desarrollo de Karhunen-Loève, para el problema de detección de M señales Gaussianas en ruido Gaussiano blanco. Las soluciones proporcionadas no presentan el problema del cálculo de los autovalores y autofunciones asociados a la función de covarianza involucrada y son fácilmente implementables desde el punto de vista práctico.

Detection of M gaussian signals using the modified approximate Karhunen-Loève expansion of a stochastic process

Palabras clave: Desarrollo modificado de un proceso estocástico, detección de M señales gaussianas en ruido gaussiano blanco

Clasificación AMS (MSC 2000): 60G12

* Este trabajo ha sido financiado por el proyecto BFM2000-1103 del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica (I+D+I), Ministerio de Ciencia y Tecnología, España.

*Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Jaén. Paraje Las Lagunillas, s/n. 23071 Jaén. E-mail: jnavarro,jcruiz@ujaen.es.

–Recibido en marzo de 2001.

–Aceptado en septiembre de 2001.

1. INTRODUCCIÓN

La detección de señales aleatorias en ruido Gaussiano blanco es un problema ampliamente estudiado en la literatura debido a su gran utilidad en la Teoría de la Comunicación Estadística (ver, por ejemplo, Van Trees, 1971 y Poor, 1994). En este problema se parte de un conjunto posible de señales aleatorias y el objetivo es decidir a partir de la medición o recepción de un proceso de observación que involucra a la señal y a un ruido perturbador, qué señal del conjunto ha sido emitida. El caso más sencillo que se puede presentar es decidir entre la presencia o la ausencia de una señal, denominado caso binario simple (Van Trees, 1971). Un ejemplo de este caso es el problema de detectar la presencia de un submarino usando un sistema de sonar. Sin embargo, existen otro tipo de situaciones prácticas, por ejemplo en astronomía, donde el número de señales a detectar es, en muchas ocasiones, superior a dos. Por esta razón, el estudio del problema de detección múltiple (M señales) es importante. Este problema puede ser modelizado por medio del siguiente conjunto de hipótesis:

$$H_i : Y(t) = S_i(t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M,$$

donde las señales $\{S_i(t); t \in [0, T]\}$ son procesos Gaussianos, centrados y continuos en media cuadrática y $\{N(t); t \in [0, T]\}$ es un ruido Gaussiano blanco con parámetro de varianza $N_0/2$ y que es independiente de todas las señales.

Dado que el ruido blanco no puede considerarse rigurosamente un verdadero proceso aleatorio, el anterior problema puede ser transformado en otro equivalente a través de un proceso de integración de las observaciones (Poor, 1994). Así, obtenemos el modelo siguiente:

$$(1) \quad H_i : X(t) = \int_0^t S_i(\tau) d\tau + W(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M,$$

siendo $\{W(t); t \in [0, T]\}$ el proceso de Wiener con parámetro $N_0/2$ e independiente de las señales.

El objetivo de este problema consiste en determinar qué señal de entre las M posibles, $S_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, ha sido la realmente emitida a partir de la recepción del proceso de observación $X(t)$. Matemáticamente, pretendemos obtener una partición del espacio de las funciones muestrales $X(t)$, $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M$, de manera que si $X(t) \in \mathcal{S}_k$ entonces se elige la hipótesis H_k . Para determinar esta partición existen diversos criterios matemáticos como son el criterio de Neyman-Pearson, Bayes, etc. Debido a la sencillez que ofrece desde el punto de vista práctico, usualmente se utiliza el criterio de minimizar la pro-

babilidad total del error, $P(\varepsilon)$, dadas unas probabilidades a priori α_i , $i = 1, \dots, M$ ¹¹. Mediante esta regla de decisión obtenemos aquella partición que hace mínima la probabilidad del error asociada, es decir, que minimiza

$$(2) \quad P(\varepsilon) = 1 - \sum_{i=1}^M \alpha_i P_i(\mathcal{S}_i),$$

siendo P_i la probabilidad correspondiente a H_i . Puede demostrarse (Kadota, 1965) que bajo este último criterio, la partición óptima $(\bar{\mathcal{S}}_1, \dots, \bar{\mathcal{S}}_M)$ para (1) viene determinada por

$$\bar{\mathcal{S}}_k = \left\{ X(t); \alpha_k \frac{dP_k}{dP_0}(X) > \alpha_i \frac{dP_i}{dP_0}(X), i < k \right\} \\ \cap \left\{ X(t); \alpha_k \frac{dP_k}{dP_0}(X) \geq \alpha_i \frac{dP_i}{dP_0}(X), i > k \right\},$$

con P_0 la probabilidad inducida por $W(t)$ y $\frac{dP_i}{dP_0}(X)$ la derivada de Radon-Nikodym de P_i con respecto a P_0 . Además, en Kadota (1965) puede encontrarse una nueva forma de expresar esta regla de decisión óptima que resulta más útil en la práctica. Esta nueva forma equivalente viene dada por

$$\text{«elegir la hipótesis } H_k \text{ si } I_k(X) = \max_{i=1, \dots, M} I_i(X)\text{»}, \quad (C1)$$

donde

$$(3) \quad I_i(X) = \log \frac{dP_i}{dP_0}(X) + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Desde el punto de vista de la implementación, es necesario una forma de calcular las derivadas de Radon-Nikodym que aparecen en el sistema de detección anterior. Una de las herramientas más utilizadas para este propósito es el desarrollo de Karhunen-Loève de un proceso estocástico (Poor, 1994). Sin embargo, esta metodología presenta el inconveniente de que $\frac{dP_i}{dP_0}(X)$ y, por tanto, el estadístico de detección $I_i(X)$ dependen de los autovalores y autofunciones del operador integral involucrado y no existe un

¹¹Estas probabilidades a priori α_i reflejan la información que se tiene acerca de cada hipótesis antes de realizar el experimento.

método estándar para calcularlos. Por ello, se utiliza una forma alternativa de representar el estadístico $I_i(X)$ denominada representación *estimadora-correladora* (Van Trees, 1971). Esta nueva forma está basada en el estimador lineal causal óptimo de la señal y es de gran utilidad cuando el estimador puede ser obtenido a través del filtro de Kalman. Sin embargo, para poder aplicar tal algoritmo de estimación es necesario que la señal verifique una ecuación de estados, hipótesis que en muchas ocasiones no se cumple.

El primer objetivo que nos planteamos en este trabajo será mostrar que el desarrollo modificado de un proceso estocástico (Ruiz-Molina y otros, 1999) permite obtener una solución al problema de detección (1) evitando los problemas presentados por el desarrollo de Karhunen-Loève. El desarrollo modificado de un proceso estocástico es una representación aproximada tipo Karhunen-Loève que posee propiedades teóricas similares a éste pero que no presenta dificultades desde el punto de vista práctico. Así, se obtiene una solución para el problema de detección (1) que es fácilmente implementable y que no requiere el cálculo de los verdaderos autovalores y autofunciones.

Por otro lado, el segundo de los objetivos que nos planteamos será proporcionar una segunda forma alternativa para $I_i(X)$ que aproxima a la representación estimadora-correladora y que está basada en un estimador subóptimo derivado a partir del desarrollo modificado. La principal ventaja de este estimador subóptimo radica en su facilidad de cálculo ya que éste puede obtenerse recursivamente de forma similar al filtro de Kalman, no precisando que la señal verifique una ecuación de estados (Navarro-Moreno y otros, 2000).

1.1. Desarrollo Modificado

A continuación hacemos un resumen del desarrollo modificado introducido en Ruiz-Molina y otros (1999). Sea $\{X(t); t \in [0, T]\}$ un proceso de segundo orden definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{B}, P) , centrado, continuo en media cuadrática y con función de covarianza $R_X(t, s)$. Los autovalores y autofunciones asociados a $R_X(t, s)$ serán denotados por $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$, respectivamente. Es bien conocido que el proceso $X(t)$ puede ser representado a través del desarrollo de Karhunen-Loève

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j \phi_j(t), \quad t \in [0, T],$$

donde la anterior serie converge en media cuadrática uniformemente en $t \in [0, T]$, y las v.a. X_j se definen de la forma

$$(4) \quad X_j = \int_0^T \phi_j(t) X(t) dt \quad m.c., \quad j = 1, 2, \dots$$

Desde un punto de vista práctico, el desarrollo de Karhunen-Loève presenta la dificultad de que no existe un método general para el cálculo de los autovalores y autofunciones de $R_X(t, s)$. Una alternativa consiste en utilizar procedimientos numéricos: el método de Rayleigh-Ritz (Baker, 1977). A partir de un conjunto de k funciones, $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)\}$, pertenecientes a un sistema completo de $L^2[0, T]$ arbitrario, este método permite obtener las autofunciones aproximadas

$$\tilde{\Phi}_{jk}(t) = \sum_{i=1}^k a_{ji} \varphi_i(t), \quad j = 1, \dots, k,$$

donde los coeficientes a_{ji} y los autovalores aproximados $\tilde{\lambda}_{jk}$ se obtienen a partir del problema de autovalores

$$\mathbf{A} \mathbf{a}_j = \tilde{\lambda}_{jk} \mathbf{B} \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

siendo los elementos de las matrices $\mathbf{A} = (A_{ij})$ y $\mathbf{B} = (B_{ij})$ de la forma

$$A_{ij} = \int_0^T \int_0^T R_X(t, s) \varphi_i(s) \varphi_j(t) dt ds, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

$$B_{ij} = \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

y los autovectores: $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jk})'$, $j = 1, \dots, k$.

Los autovalores y autofunciones aproximados obtenidos tienen las siguientes propiedades: $0 \leq \tilde{\lambda}_{jk} \leq \lambda_j$, $\tilde{\lambda}_{jk} \rightarrow \lambda_j$ y $\|\varphi_j(t) - \tilde{\Phi}_{jk}(t)\|_2 \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, donde $\|\cdot\|_2$ denota a la norma definida en $L^2[0, T]$. Además, el sistema de funciones $\{\tilde{\Phi}_{jk}(t)\}_{j=1}^k$ es ortogonal en $L^2[0, T]$, por lo que a partir de ahora, consideraremos que también está ortonormalizado. Así, se verifica

$$\int_0^T \int_0^T R_X(t, s) \tilde{\Phi}_{ik}(s) \tilde{\Phi}_{jk}(t) dt ds = \tilde{\lambda}_{ik} \delta_{ij}.$$

Basadas en estas autofunciones aproximadas, en Ruiz-Molina y otros (1999) se propone un desarrollo aproximado tipo Karhunen-Loève denominado desarrollo modificado. Tal desarrollo se obtiene proyectando el proceso $X(t)$ sobre el subespacio de $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ generado por el conjunto de variables aleatorias ortonormales $\{\tilde{\lambda}_{jk}^{-\frac{1}{2}} \tilde{X}_{jk}\}_{j=1}^n$, $n \leq k$, donde las variables \tilde{X}_{jk} se definen de forma similar a (4) pero utilizando las autofunciones aproximadas en lugar de las verdaderas, es decir,

$$\tilde{X}_{jk} = \int_0^T \tilde{\Phi}_{jk}(t) X(t) dt \quad m.c., \quad j = 1, 2, \dots$$

El desarrollo modificado tiene la expresión

$$(5) \quad \check{X}_n(t) = \sum_{j=1}^n \check{X}_{jk} \hat{\phi}_{jk}(t), \quad t \in [0, T],$$

donde

$$\hat{\phi}_{jk}(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{jk}} \int_0^T R_X(t, s) \tilde{\phi}_{jk}(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Se demuestra en Ruiz-Molina y otros (1999) que las funciones $\hat{\phi}_{jk}(t)$, denominadas autofunciones modificadas, se aproximan mejor a la verdaderas que las aproximadas.

De hecho, se tiene que $\|\phi_j(t) - \hat{\phi}_{jk}(t)\|_\infty \xrightarrow{k \uparrow \infty} 0$, donde $\|\cdot\|_\infty$ denota a la norma del supremo en $[0, T]$. Además, se verifica

$$\|X(t) - \check{X}_n(t)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

uniformemente en $t \in [0, T]$, donde $\|Z\|_H = (E[Z]^2)^{1/2}$, con $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Nota 1. Aunque existen otros desarrollos en serie de un proceso estocástico diferentes al desarrollo de Karhunen-Loève, este último es óptimo en el sentido de que minimiza el error en media cuadrática con una representación finita del proceso. De esta forma, el desarrollo (5) permite aproximar con la precisión deseada al desarrollo truncado de Karhunen-Loève en n términos; es decir, para cada n fijo podemos elegir un k suficientemente grande de manera que se cumpla $\|X_n(t) - \check{X}_n(t)\|_H < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y $X_n(t) = \sum_{j=1}^n X_j \phi_j(t)$. Así, a través del método propuesto se puede controlar en «cierta medida» la propiedad de optimalidad bajo truncamiento que posee el desarrollo de Karhunen-Loève.

Nota 2. Con objeto de abreviar la notación, a partir de ahora omitiremos el subíndice k en $\hat{\phi}_{jk}(t)$, $\tilde{\phi}_{jk}(t)$, $\tilde{\lambda}_{jk}$ y \check{X}_{jk} .

2. DETECCIÓN DE M SEÑALES GAUSSIANAS

En esta sección se aborda el problema de detección planteado en (1). Las funciones de covarianza de las M señales, $S_i(t)$, se denotarán por $R_{S_i}(t, s)$ y sus correspondientes autovalores y autofunciones se denotarán por $\{\lambda_{ij}\}_{j=1}^\infty$ y $\{\phi_{ij}(t)\}_{j=1}^\infty$, respectivamente.

Se supondrá que el sistema $\{\phi_{ij}(t)\}_{j=1}^\infty$ es completo para $i = 1, \dots, M$.

Como se ha indicado en la sección anterior, si se utiliza el criterio de minimizar la probabilidad total del error entonces la regla de decisión óptima viene determinada por (C1). El principal handicap de ésta es la implementación del estadístico $I_i(X)$ (3) debido a que es necesario calcular la derivada de Radon-Nikodym correspondiente. Esto puede ser solventado utilizando, por un lado, el desarrollo de Karhunen-Loève de cada señal

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} \phi_{ij}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, M,$$

con $S_{ij} = \int_0^T \phi_{ij}(t) S_i(t) dt$ (m.c.) y por otro, que el proceso de Wiener admite la representación en serie (Poor, 1994)

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{W}_j \int_0^t \phi_j(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

en el sentido de la media cuadrática, con $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal completo en $L^2[0, T]$ y $\bar{W}_j = \int_0^T \phi_j(t) dW(t)$ (m.c.). Así, puede demostrarse (Poor, 1994) que el problema (1) es equivalente a

$$(6) \quad H_i : X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{X}_{ij} \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M,$$

donde $\bar{X}_{ij} = \int_0^T \phi_{ij}(t) dX(t)$ (m.c.).

Como consecuencia, se demuestra (Poor, 1994) que

$$\log \frac{dP_i}{dP_0}(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \log \left(1 + 2 \frac{\lambda_{ij}}{N_0} \right) + \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} \bar{X}_{ij}^2, \quad i = 1, \dots, M,$$

siendo la convergencia de la serie en el sentido de la media cuadrática. Por tanto, el estadístico $I_i(X)$ (3) toma la forma

$$(7) \quad I_i(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \log \left(1 + 2 \frac{\lambda_{ij}}{N_0} \right) + \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} \bar{X}_{ij}^2 + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

siendo la convergencia de la serie en el sentido de la media cuadrática.

Desde el punto de vista práctico, esta solución presenta la dificultad de su dependencia explícita de los autovalores y autofunciones de $R_{S_i}(t, s)$. Para solucionar este problema se hará uso del desarrollo modificado de cada señal

$$\check{S}_{in}(t) = \sum_{j=1}^n \check{S}_{ij} \hat{\phi}_{ij}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, M,$$

con $\check{S}_{ij} = \int_0^T \check{\phi}_{ij}(t) S_i(t) dt$ (m.c.).

Teorema 1. *Bajo cualquier hipótesis H_i , $i = 1, \dots, M$, se tiene que*

$$\|X(t) - \sum_{j=1}^n \check{X}_{ij} \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

donde $\check{X}_{ij} = \int_0^T \check{\phi}_{ij}(t) dX(t)$ (m.c.).

Demostración

En primer lugar, observar que

$$\begin{aligned} \bar{X}_{ij} &= S_{ij} + \bar{W}_{ij}, \\ \check{X}_{ij} &= \check{S}_{ij} + \check{W}_{ij}, \end{aligned}$$

con $\bar{W}_{ij} = \int_0^T \phi_{ij}(t) dW(t)$ y $\check{W}_{ij} = \int_0^T \check{\phi}_{ij}(t) dW(t)$.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\bar{X}_{ij} - \check{X}_{ij}\|_H &\leq \|\check{S}_{ij} - S_{ij}\|_H + \|\bar{W}_{ij} - \check{W}_{ij}\|_H \\ (8) \quad &\leq \left(\sqrt{T} \|S_i(t_0)\|_H + \sqrt{\frac{N_0}{2}} \right) \|\phi_{ij}(t) - \check{\phi}_{ij}(t)\|_2 \xrightarrow{k \uparrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el Teorema del valor medio.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} &\left\| X(t) - \sum_{j=1}^n \check{X}_{ij} \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau \right\|_H \\ (9) \quad &\leq \left\| X(t) - \sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau \right\|_H + \sum_{j=1}^n \left\| \bar{X}_{ij} \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau - \check{X}_{ij} \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau \right\|_H. \end{aligned}$$

El primer término de (9) es convergente a cero por (6). Para demostrar que el segundo también tiende a cero, obsérvese que éste puede ser acotado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(10) \quad & \sum_{j=1}^n \left\| \bar{X}_{ij} \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau - \tilde{X}_{ij} \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau \right\|_H \\
& \leq \sum_{i=1}^n \|\bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij}\|_H \left| \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau \right| + \sum_{i=1}^n \|\tilde{X}_{ij}\|_H \left| \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau \right| \\
& \leq \sqrt{T} \sum_{i=1}^n \|\bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij}\|_H + K_1 \sum_{i=1}^n \left| \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau \right|,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se ha obtenido teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \phi_{ij}(\tau) d\tau \right| & \leq \left(\int_0^T \phi_{ij}^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{T} = \sqrt{T} \\
\|\tilde{X}_{ij}\|_H & = \left(\tilde{\lambda}_{ij} + \frac{N_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T R_{S_i}(t, t) dt + \frac{N_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = K_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente, por (8) y por las propiedades de convergencia de $\hat{\phi}_j(t)$, cuando $k \rightarrow \infty$, podemos elegir para cada n , un valor suficientemente grande de k , de manera que (10) sea arbitrariamente pequeño, con lo cual se demuestra el resultado. \square

La consecuencia más importante que deducimos de este resultado es la posibilidad de aproximar el problema original (6) por el siguiente:

$$H_i : X(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{X}_{ij} \int_0^t \hat{\phi}_{ij}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M,$$

para el cual el criterio óptimo es

$$\text{«elegir la hipótesis } H_k \text{ si } \tilde{I}_{kn}(X) = \max_{i=1, \dots, M} \tilde{I}_m(X)\text{»}, \quad (C1a)$$

donde

$$\tilde{I}_m(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log \left(1 + 2 \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{N_0} \right) + \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\lambda}_{ij} + \frac{N_0}{2}} \tilde{X}_{ij}^2 + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Teorema 2. *Bajo cualquier hipótesis H_i , $i = 1, \dots, M$, se tiene que*

$$\left\| I_i(X) - \tilde{I}_m(X) \right\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0.$$

Demostración

$$\left\| I_i(X) - \tilde{I}_{in}(X) \right\|_H \leq \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

con

$$\mathcal{A}_1 = \left\| I_i(X) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log \left(1 + 2 \frac{\lambda_{ij}}{N_0} \right) - \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} \bar{X}_{ij}^2 - \log \alpha_i \right\|_H,$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left| \log \left(1 + 2 \frac{\lambda_{ij}}{N_0} \right) - \log \left(1 + 2 \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{N_0} \right) \right| + \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} \bar{X}_{ij}^2 - \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\lambda}_{ij} + \frac{N_0}{2}} \tilde{X}_{ij}^2 \right\|_H.$$

El término \mathcal{A}_1 converge a cero por (7). Por otro lado, puesto que las variables aleatorias $\bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij}$ y $\bar{X}_{ij} + \tilde{X}_{ij}$ son normales, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \bar{X}_{ij}^2 - \tilde{X}_{ij}^2 \right\|_H &= \left(E [(\bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij})(\bar{X}_{ij} + \tilde{X}_{ij})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(E [\bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij}]^4 E [\bar{X}_{ij} + \tilde{X}_{ij}]^4 \right)^{\frac{1}{4}} \\ (11) \quad &= \sqrt{3} \left\| \bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij} \right\|_H \left\| \bar{X}_{ij} + \tilde{X}_{ij} \right\|_H \\ &\leq K_2 \left\| \bar{X}_{ij} - \tilde{X}_{ij} \right\|_H, \end{aligned}$$

donde $K_2 = 2\sqrt{3}K_1$.

Por tanto, utilizando (8) se tiene que

$$\left\| \bar{X}_{ij}^2 - \tilde{X}_{ij}^2 \right\|_H \xrightarrow{k \uparrow \infty} 0.$$

Además, como se verifica que

$$\left| \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} - \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\lambda}_{ij} + \frac{N_0}{2}} \right| \xrightarrow{k \uparrow \infty} 0,$$

obtenemos que

$$\left\| \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} \bar{X}_{ij}^2 - \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\lambda}_{ij} + \frac{N_0}{2}} \tilde{X}_{ij}^2 \right\|_H \xrightarrow{k \uparrow \infty} 0.$$

Así, \mathcal{A}_2 tiende a cero y el resultado se cumple. \square

Por tanto, podemos concluir que se puede utilizar el criterio (C1a) como solución alternativa a la regla de decisión óptima (C1) en aquellos casos en los cuales no sea posible la obtención de los verdaderos autovalores y autofunciones.

Por otra parte, en Van Trees (1971) se demuestra, utilizando el estimador filtrado de la señal, que el estadístico $I_i(X)$ (3) puede escribirse de la forma

$$I_i(X) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \hat{S}_i(t) dX(t) - \frac{1}{N_0} \int_0^T \hat{S}_i^2(t) dt + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

denominada forma estimadora-correladora, donde $\hat{S}_i(t) = \int_0^t h_i(t, \tau) dX(\tau)$ es el estimador causal de la señal $S_i(t)$ obtenido a partir de la señal perturbada por ruido blanco (bajo H_i). La función de respuesta a impulsos $h_i(t, \tau)$ satisface la ecuación integral

$$\int_0^t h_i(t, s) R_{S_i}(\tau, s) ds + \frac{N_0}{2} h_i(t, \tau) = R_{S_i}(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

La resolución de esta ecuación es difícil en general, lo que imposibilita la obtención del estimador óptimo. Por ello, a continuación se propone un nuevo estadístico $\hat{I}_{in}(X)$ que aproxima al verdadero, basado en el estimador subóptimo

$$\hat{S}_{in}(t) = \int_0^t \tilde{h}_{in}(t, \tau) dX(\tau),$$

donde $\tilde{h}_{in}(t, \tau)$ es la solución de la ecuación integral

$$\int_0^t \tilde{h}_{in}(t, s) R_{\check{S}_{in}}(\tau, s) ds + \frac{N_0}{2} \tilde{h}_{in}(t, \tau) = R_{\check{S}_{in}}(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T,$$

con $R_{\check{S}_{in}}(t, s)$ la función de covarianza de $\check{S}_{in}(t)$. Esta solución tiene la expresión

$$\tilde{h}_{in}(t, \tau) = \frac{2}{N_0} \hat{\Phi}'_{in}(t) \left[\tilde{\Lambda}_{in}^{-1} + \frac{2}{N_0} \int_0^t \hat{\Phi}_{in}(s) \hat{\Phi}'_{in}(s) ds \right]^{-1} \hat{\Phi}_{in}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T,$$

siendo $\hat{\Phi}_{in}(t)$ un vector $n \times 1$ con entrada j -ésima la autofunción modificada $\hat{\phi}_{ij}(t)$ y $\tilde{\Lambda}_{in}$ una matriz diagonal con elementos los autovalores aproximados $\tilde{\lambda}_{ij}$, con $j = 1, \dots, n$.

En Navarro-Moreno y otros (2000) se demuestra que esta función de respuesta subóptima converge a la óptima en el sentido

$$\|h_i(t, \cdot) - \tilde{h}_{in}(t, \cdot)\|_2 \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

uniformemente en $t \in [0, T]$. Utilizando este hecho, en Navarro-Moreno y otros (2000) se prueba también que

$$\|\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

uniformemente en $t \in [0, T]$. Tal estadístico, $\hat{I}_{in}(X)$, se define de la forma

$$\hat{I}_{in}(X) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \hat{S}_{in}(t) dX(t) - \frac{1}{N_0} \int_0^T \hat{S}_{in}^2(t) dt + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Teorema 3. Bajo cualquier hipótesis H_i , $i = 1, \dots, M$, se tiene que

$$\|I_i(X) - \hat{I}_{in}(X)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0.$$

Demostración

$$(12) \quad \begin{aligned} & \|I_i(X) - \hat{I}_{in}(X)\|_H \\ & \leq \frac{2}{N_0} \left\| \int_0^T \hat{S}_i(t) dX(t) - \int_0^T \hat{S}_{in}(t) dX(t) \right\|_H \end{aligned}$$

$$(13) \quad + \frac{1}{N_0} \left\| \int_0^T \hat{S}_i^2(t) dt - \int_0^T \hat{S}_{in}^2(t) dt \right\|_H.$$

La norma en (12) puede ser acotada de la forma

$$(14) \quad \begin{aligned} & \left\| \int_0^T \hat{S}_i(t) dX(t) - \int_0^T \hat{S}_{in}(t) dX(t) \right\|_H \\ & \leq \left\| \int_0^T \hat{S}_i(t) dW(t) - \int_0^T \hat{S}_{in}(t) dW(t) \right\|_H \end{aligned}$$

$$(15) \quad + \left\| \int_0^T S_i(t) (\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)) dt \right\|_H.$$

Para (14) tenemos que

$$\left\| \int_0^T \hat{S}_i(t) dW(t) - \int_0^T \hat{S}_{in}(t) dW(t) \right\|_H = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \left(\int_0^T \|\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

porque $\|\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0$ uniformemente en $t \in [0, T]$.

Puesto que $S_i(t)$ y $\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)$ son variables normales para cada t , haciendo un razonamiento similar al realizado en (11) y utilizando el Teorema del valor medio obtenemos para (15)

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T S_i(t) (\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)) dt \right\|_H &\leq \int_0^T \|S_i(t) (\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t))\|_H dt \\ &\leq \sqrt{3} \|S_i(t_0)\|_H \int_0^T \|\hat{S}_i(t) - \hat{S}_{in}(t)\|_H dt \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0, \end{aligned}$$

y entonces (12) tiende a cero.

Finalmente, también es inmediato comprobar que

$$\|\hat{S}_i^2(t) - \hat{S}_{in}^2(t)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

uniformemente en $t \in [0, T]$, con lo cual (13) tiende a cero, y así se sigue la afirmación. \square

Como consecuencia obtenemos un nuevo criterio para resolver el problema (1),

$$\text{«elegir la hipótesis } H_k \text{ si } \hat{I}_{kn}(X) = \max_{i=1, \dots, M} \hat{I}_{in}(X)\text{»}. \quad (C1b)$$

Nota 3. Las soluciones (C1a) y (C1b) generalizan a las obtenidas en Ruiz-Molina y otros (2001) para el caso binario simple.

3. EJEMPLO

En la práctica, el cálculo de $P(\varepsilon)$ (2) que se comete con el criterio (C1) es difícil puesto que no existe un método general para determinarla. Normalmente se utilizan acotaciones o aproximaciones de ésta. Así, por ejemplo, si $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ en Van Trees (1971) puede obtenerse para el caso binario simple la siguiente aproximación:

$$(16) \quad \begin{aligned} P(\varepsilon) &\simeq \frac{1}{2} \exp\left(\mu(s_m) + \frac{s_m^2}{2} \ddot{\mu}(s_m)\right) \left(1 - \Phi\left(s_m \sqrt{\ddot{\mu}(s_m)}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp\left(\mu(s_m) + \frac{(1-s_m)^2}{2} \ddot{\mu}(s_m)\right) \left(1 - \Phi\left((1-s_m) \sqrt{\ddot{\mu}(s_m)}\right)\right), \end{aligned}$$

con Φ la función de distribución de una normal estándar y

$$(17) \quad \mu(s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \log \left(\frac{(1 + \frac{2\lambda_j}{N_0})^{(1-s)}}{1 + \frac{2(1-s)\lambda_j}{N_0}} \right), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

siendo $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ el sistema de autovalores correspondiente a $R_S(t, s)$ y s_m es el punto tal que $\dot{\mu}(s_m) = \left. \frac{d\mu(s)}{ds} \right|_{s=s_m} = 0$.

En el caso de considerar el desarrollo modificado (5) de la señal $S(t)$ entonces la expresión (17) queda de la forma

$$\tilde{\mu}_n(s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{(1 + \frac{2\tilde{\lambda}_j}{N_0})^{(1-s)}}{1 + \frac{2(1-s)\tilde{\lambda}_j}{N_0}} \right), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

Por tanto, si denotamos por $\tilde{P}_n(\varepsilon)$ a la probabilidad total del error que se comete con el criterio (C1a) obtenemos que

$$(18) \quad \begin{aligned} \tilde{P}_n(\varepsilon) \simeq & \frac{1}{2} \exp \left(\tilde{\mu}_n(\tilde{s}_m) + \frac{\tilde{s}_m^2}{2} \ddot{\mu}_n(\tilde{s}_m) \right) \left(1 - \Phi \left(\tilde{s}_m \sqrt{\ddot{\mu}_n(\tilde{s}_m)} \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \exp \left(\tilde{\mu}_n(\tilde{s}_m) + \frac{(1-\tilde{s}_m)^2}{2} \ddot{\mu}_n(\tilde{s}_m) \right) \left(1 - \Phi \left((1-\tilde{s}_m) \sqrt{\ddot{\mu}_n(\tilde{s}_m)} \right) \right), \end{aligned}$$

con \tilde{s}_m verificando que $\dot{\mu}_n(\tilde{s}_m) = 0$.

A continuación, se ilustra el funcionamiento del método propuesto comparando la aproximación (16) con (18) en un ejemplo práctico. Para ello, vamos a considerar que $\{S(t); t \in [0, 1]\}$ es un proceso Gaussiano, centrado y con función de covarianza $R_S(t, s) = \min(t, s) - ts$. Además, supondremos que $W(t)$ es el proceso de Wiener estándar.

En Gutiérrez y otros (1992) puede encontrarse que los autovalores verdaderos para esta señal son de la forma $\lambda_j = \frac{1}{j^2\pi^2}$, $j = 1, 2, \dots$. Por tanto, aplicando (16) obtenemos que $P(\varepsilon) \simeq 0.48579$.

Por otro lado, en Gutiérrez y otros (1992) utilizando una base de funciones trigonométricas y otra de polinomios de Legendre con $k = 5$ se obtuvieron los siguientes autovalores aproximados:

Aut. aprox.	Base trigon.	Base de polin.
$\tilde{\lambda}_1$	0.10111	0.10132
$\tilde{\lambda}_2$	0.02533	0.01667
$\tilde{\lambda}_3$	0.01100	0.01111
$\tilde{\lambda}_4$	0.00633	0.00264
$\tilde{\lambda}_5$	0.00289	0.00135

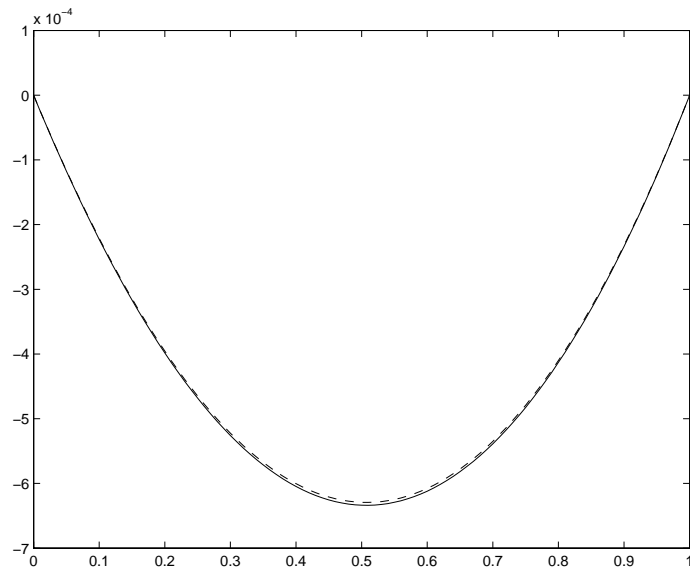


Figura 1. $\mu(s)$ (línea continua) y $\tilde{\mu}_5(s)$ correspondiente a la base trigonométrica.

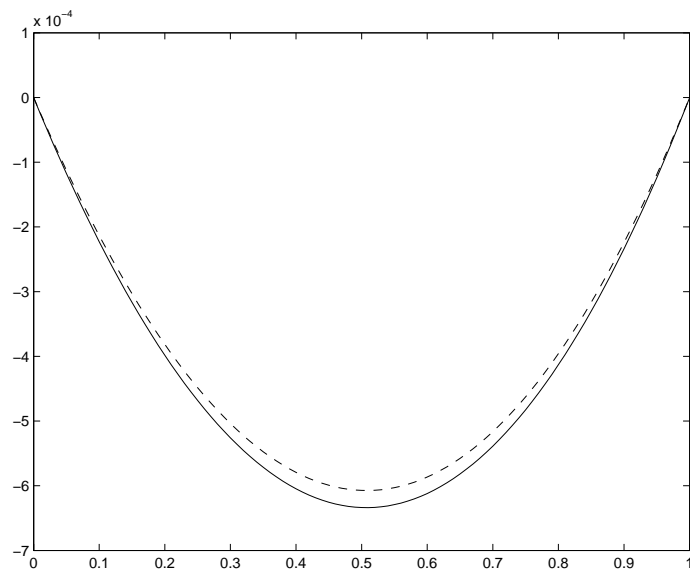


Figura 2. $\mu(s)$ (línea continua) y $\tilde{\mu}_5(s)$ correspondiente a la base de polinomios de Legendre.

De esta manera, aplicando (18) se obtiene que $\tilde{P}_5(\varepsilon) \simeq 0.48584$ para la base trigonométrica y $\tilde{P}_5(\varepsilon) \simeq 0.48609$ para la base de polinomios de Legendre.

Finalmente, en las Figuras 1 y 2 se representan $\mu(s)$ y $\tilde{\mu}_5(s)$ para las dos bases.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una nueva solución para el problema de detección de M señales Gaussianas en ruido Gaussiano blanco. Haciendo uso del desarrollo modificado de un proceso estocástico se ha obtenido una regla de decisión subóptima que no presenta la dificultad del cálculo de autovalores y autofunciones.

Por otro lado, se ha propuesto una segunda solución aproximada basada en un estimador subóptimo obtenido mediante el desarrollo modificado. Este estimador subóptimo supone una alternativa al filtro de Kalman cuando no es posible obtener una ecuación de estados para la señal.

La principal ventaja de estas dos soluciones es su facilidad de implementación desde el punto de vista computacional y aunque ninguna proporcione la solución óptima, sin embargo, se puede controlar el error que se comete en la aproximación a la óptima sin más que elegir adecuadamente el número de términos que conforman el desarrollo modificado.

Para finalizar, comentar que aunque el criterio utilizado haya sido el criterio de minimizar la probabilidad total del error, los resultados obtenidos pueden adaptarse sin dificultades a otro tipo de criterios, como es el criterio de Bayes. La importancia de este trabajo radica en las aproximaciones proporcionadas de la derivada de Radon-Nikodym, ya que ésta es la pieza fundamental a la hora de determinar las diversas reglas óptimas que proporcionan otros criterios. La razón de haber realizado el estudio de detección múltiple utilizando el criterio mencionado se debe a su facilidad de implementación, por lo que es usualmente utilizado en la literatura.

5. REFERENCIAS

- Baker, C. T. H. (1977). *The Numerical Treatment of Integral Equations*. Oxford University Press, Oxford.
- Gutiérrez, R., Ruiz, J. C. and Valderrama, M. J. (1992). «On the Numerical Expansion of a Second Order Stochastic Process». *Appl. Stochastic Models and Data Anal.*, 8(2), 67-77.
- Kadota, T. T. (1965). «Optimum Reception of M -ary Gaussian Signals in Gaussian Noise». *Bell System Tech. J.*, 44, 2187-2197.

- Navarro-Moreno, J., Ruiz-Molina, J. C. and Valderrama, M. J. (2000). «A Solution to Linear Estimation Problems Using Approximate Karhunen-Loève Expansions». *IEEE, Trans. Information Theory*, 46(4), 1677-1682.
- Poor, H. V. (1994). *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- Ruiz-Molina, J. C., Navarro, J. and Valderrama, M. J. (1999). «Differentiation of the Modified Approximative Karhunen-Loève Expansion of a Stochastic Process». *Statist. Prob. Lett.*, 42, 91-98.
- Ruiz-Molina, J. C., Navarro-Moreno, J. and Oya, A. (2001). «Signal Detection Using Approximate Karhunen-Loève Expansions». *IEEE, Trans. Information Theory*, 47(4), 1672-1680.
- Van Trees, H. L. (1971). *Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part III*. Wiley, New York.

ENGLISH SUMMARY

DETECTION OF M GAUSSIAN SIGNALS USING THE MODIFIED APPROXIMATE KARHUNEN-LOÈVE EXPANSION OF A STOCHASTIC PROCESS*

JESÚS NAVARRO-MORENO
JUAN CARLOS RUIZ-MOLINA
Universidad de Jaén*

A new approach to the problem of detecting M Gaussian signals in white noise is proposed by using the modified approximate Karhunen-Loève expansion of a stochastic process. The solutions obtained do not require the calculation of true eigenvalues and eigenfunctions and they are easily implementable in real situations.

Keywords: Modified Approximate Karhunen-Loève Expansion of a Stochastic Process, Detection of M Gaussian Signals in White Gaussian Noise

AMS Classification (MSC 2000): 60G12

* This work was supported in part by Project BFM2000-1103, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica (I+D+I), Ministerio de Ciencia y Tecnología, Spain.

*Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Jaén. Paraje Las Lagunillas, s/n. 23071 Jaén. E-mail: jnavarro,jcruiz@ujaen.es.

–Received March 2001.

–Accepted September 2001.

1. INTRODUCTION

In this paper we treat the problem of detecting M Gaussian signals in additive white Gaussian noise. This problem can be formulated in the following way: suppose there are M stochastic signals, $S_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, with *a priori* probabilities α_i , $0 < \alpha_i < 1$ and $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$, for transmission. The observation process $Y(t)$ consists of one of these M signals and an additive white Gaussian noise $N(t)$, i.e.

$$H_i : Y(t) = S_i(t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M,$$

where the signals $\{S_i(t); t \in [0, T]\}$ are Gaussian stochastic processes with zero-mean and continuous in quadratic mean, and $\{N(t); t \in [0, T]\}$ is a white Gaussian noise with spectral height $N_0/2$ and independent of each signal. Denote by $R_{S_i}(t, s)$ the covariance function of $S_i(t)$.

Since the white noise does not exist as a mathematical random process in the ordinary sense, we convert the above model to one that is better posed by integrating the observation process (Poor, 1994). Thus, we obtain the following model:

$$(1) \quad H_i : X(t) = \int_0^t S_i(\tau) d\tau + W(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M,$$

where $\{W(t); t \in [0, T]\}$ is a Wiener process with spectral height $N_0/2$ and independent of each signal.

Our objective is to observe the observation process $X(t)$ and to decide which one of the M Gaussian signals, $S_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, must have been received.

Kadota (1965) proposed the optimum receiver by using the minimum error-probability criterion in the following way:

$$\text{«to choose the hypothesis } H_k \text{ if } I_k(X) = \max_{i=1, \dots, M} I_i(X)\text{»},$$

where

$$I_i(X) = \log \frac{dP_i}{dP_0}(X) + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

with $\frac{dP_i}{dP_0}(X)$ the Radon-Nikodym derivative of P_i (probability measure described by H_i) with respect to P_0 (probability measure corresponding to $W(t)$).

From the practical standpoint, a method is necessary to compute the Radon-Nikodym derivative $\frac{dP_i}{dP_0}(X)$. One of the most widely used methodologies to solve this difficulty

is the Karhunen-Loève expansion of a stochastic process (Poor, 1994). Thus, by denoting the corresponding eigenvalues and eigenfunctions of $R_{S_i}(t, s)$ by $\{\lambda_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ and $\{\phi_{ij}(t)\}_{j=1}^{\infty}$, respectively, it is shown in Poor (1994) that

$$(2) \quad I_i(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \log \left(1 + 2 \frac{\lambda_{ij}}{N_0} \right) + \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij} + \frac{N_0}{2}} \bar{X}_{ij}^2 + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

where the convergence is in the mean-square sense and $\bar{X}_{ij} = \int_0^T \phi_{ij}(t) dX(t)$ (in q.m.).

The drawback of this methodology is that the detection statistic $I_i(X)$ depends explicitly on eigenvalues and eigenfunctions of the covariance kernel involved and there is no standard method to compute them.

Therefore, the statistic $I_i(X)$ is usually rewritten in the following form called the *estimator-correlator* representation (Van Trees, 1971):

$$(3) \quad I_i(X) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \hat{S}_i(t) dX(t) - \frac{1}{N_0} \int_0^T \hat{S}_i^2(t) dt + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

where $\hat{S}_i(t) = \int_0^t h_i(t, \tau) dX(\tau)$ is the causal estimator of $S_i(t)$ from signal plus white noise (under H_i). The impulse response function $h_i(t, \tau)$ satisfies the integral equation

$$\int_0^t h_i(t, s) R_{S_i}(\tau, s) ds + \frac{N_0}{2} h_i(t, \tau) = R_{S_i}(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

However, there is not a general method to solve this integral equation and due to this, (3) is usually impractical to compute.

The first objective of this paper is to show that the modified approximate Karhunen-Loève expansion of a stochastic process (Ruiz-Molina *et al.*, 1999) which is based on the approximate eigenvalues and eigenfunctions calculated from the Rayleigh-Ritz method, allows us to obtain a solution to the detection problem (1) circumventing the above difficulties. Such a solution is easily implementable on a computer and does not require the calculation of true eigenvalues and eigenfunctions.

On the other hand, it is proposed an alternative form to the *estimator-correlator* representation which is based on a suboptimum estimator obtained from the modified approximate Karhunen-Loève expansion. The main advantage of this suboptimum estimator is that it can be derived through an efficient algorithm similar to the Kalman filter (Navarro-Moreno *et al.*, 2000).

For that, in the next subsection the modified approximate Karhunen-Loève expansion of a stochastic process introduced in Ruiz-Molina *et al.* (1999) is summarized.

1.1. Modified Approximate Karhunen-Loève Expansion

Let $\{X(t); t \in [0, T]\}$ be a stochastic process defined on the probability space (Ω, \mathcal{B}, P) , with zero-mean, continuous in quadratic mean and covariance function $R_X(t, s)$. Let $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^n$ and $\{\tilde{\phi}_j(t)\}_{j=1}^n$ be its corresponding approximate eigenvalues and eigenfunctions calculated from the Rayleigh-Ritz method (Baker, 1977). The modified approximate Karhunen-Loève expansion of the process $X(t)$ is defined in the following way (Ruiz-Molina *et al.*, 1999):

$$\check{X}_n(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{X}_j \hat{\phi}_j(t), \quad t \in [0, T],$$

where

$$\hat{\phi}_j(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \int_0^T R_X(t, s) \tilde{\phi}_j(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

and $\tilde{X}_j = \int_0^T \tilde{\phi}_j(t) X(t) dt$ (in q.m.), with $E[\tilde{X}_j \tilde{X}_l] = \tilde{\lambda}_j \delta_{jl}$.

This expansion satisfies

$$\|X(t) - \check{X}_n(t)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

uniformly in $t \in [0, T]$, where $\|Z\|_H = (E[Z]^2)^{1/2}$, with $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

2. THE RESULTS

As we have already mentioned, the major drawback of (2) is its explicit dependence on eigenvalues and eigenfunctions of $R_{S_i}(t, s)$. This difficulty can be resolved by using the modified expansion of $S_i(t)$

$$\check{S}_{in}(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{S}_{ij} \hat{\phi}_{ij}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, M,$$

with $\tilde{S}_{ij} = \int_0^T \tilde{\phi}_{ij}(t) S_i(t) dt$ (in q.m.).

Theorem 1. Under any hypothesis H_i , $i = 1, \dots, M$, we have

$$\|I_i(X) - \tilde{I}_m(X)\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

where

$$\tilde{I}_{in}(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log \left(1 + 2 \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{N_0} \right) + \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\lambda}_{ij} + \frac{N_0}{2}} \tilde{X}_{ij}^2 + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

with $\tilde{X}_{ij} = \int_0^T \tilde{\Phi}_{ij}(t) dX(t)$ (in q.m.).

Hence, we obtain the following approach to the problem (1):

$$\text{«to choose the hypothesis } H_k \text{ if } \tilde{I}_{kn}(X) = \max_{i=1, \dots, M} \tilde{I}_{in}(X)\text{»}.$$

On the other hand, we propose here an alternative statistic to (3), $\hat{I}_{in}(X)$, which is based on the suboptimum estimator (Navarro *et al.*, 2000)

$$\hat{S}_{in}(t) = \int_0^t \tilde{h}_{in}(t, \tau) dX(\tau),$$

where $\tilde{h}_{in}(t, \tau)$ verifies the integral equation

$$\int_0^t \tilde{h}_{in}(t, s) R_{\check{S}_{in}}(\tau, s) ds + \frac{N_0}{2} \tilde{h}_{in}(t, \tau) = R_{\check{S}_{in}}(\tau, t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T,$$

where $R_{\check{S}_{in}}(t, s)$ is the covariance function of $\check{S}_{in}(t)$. Such a statistic $\hat{I}_{in}(X)$ is defined in the following way:

$$\hat{I}_{in}(X) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \hat{S}_{in}(t) dX(t) - \frac{1}{N_0} \int_0^T \hat{S}_{in}^2(t) dt + \log \alpha_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Theorem 2. Under any hypothesis H_i , $i = 1, \dots, M$, we have

$$\left\| \hat{I}_i(X) - \hat{I}_{in}(X) \right\|_H \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0.$$

Hence, it is obtained a new criterion to solve the problem (1):

$$\text{«to choose the hypothesis } H_k \text{ if } \hat{I}_{kn}(X) = \max_{i=1, \dots, M} \hat{I}_{in}(X)\text{»}.$$