**PROBLEMA N. 84**

1) La función de densidad de $X_\beta$, variable $X$ condicionada a $X \leqslant \beta$ es

$$\begin{aligned} f_\beta(x) &= \frac{d}{dx} P(X \leqslant x / X \leqslant \beta) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{F(x)}{F(\beta)} \\ &= \frac{f(x)}{F(\beta)} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \beta \end{aligned}$$

2) En el problema n. 49 (*Qüestiió*, 17(2), 1993), se prueba que si $X$ es una variable aleatoria con densidad $f(x)$ y

$$\Gamma_\beta = \inf_{0 \leqslant x \leqslant \beta} f(x)$$

entonces se cumple la desigualdad

$$\beta^2 \Gamma_\beta \leqslant \sqrt{12}\sigma$$

siendo $\sigma$ la desviación típica. Aplicando esta desigualdad a la función $f_\beta(x)$ obtenemos

$$\beta^2 \inf_{0 \leqslant x \leqslant \beta} \frac{f(x)}{F(\beta)} \leqslant \sqrt{12}\sigma(\beta)$$

siendo $\sigma(\beta)$ la desviación típica de $X_\beta$. Obsérvese que hay igualdad si y sólo si $X$ es uniforme en $(0,\alpha)$, con $\beta \leqslant \alpha$.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

**PROBLEMA N. 85**

1) Supongamos cierta la hipótesis nula

$$H_0 : (X,Y) \text{ tiene la misma distribución que } (Y,X).$$

Debemos probar que $P(Z \leqslant a) = P(-Z \leqslant a)$, siendo $Z = X - Y$. Tenemos:

$$\begin{aligned} P(X-Y \leqslant a) &= P\big((X,Y) \in \{(x,y)/x-y \leqslant a\}\big) \\ &= P\big((Y,X) \in \{(x,y)/x-y \leqslant a\}\big) && \text{(por } H_0\text{)} \\ &= P\big((X,Y) \in \{(x,y)/y-x \leqslant a\}\big) && \text{(intercambiando } x,y\text{)} \\ &= P(Y-X \leqslant a) \end{aligned}$$

Luego $Z = X - Y$ tiene la misma distribución que $-Z = Y - X$, y la distribución de $Z$ es simétrica respecto del origen.

2) Aceptar la hipótesis

$$H_1 : \text{ la mediana de } Z \text{ es positiva}$$

implica rechazar $H_0$. En efecto, si $H_0$ es cierta, entonces

$$P(Z \leqslant 0) = P(Z \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$

y la mediana de $Z$ es 0. Luego $H_1$ es incompatible con $H_0$.

3) Sea $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ una muestra aleatoria simple de $(X,Y)$. Si $H_0$ es cierta

$$P(X-Y < 0) = P(Y-X < 0) = \frac{1}{2},$$

luego el número de veces $k$ tal que

$$X_i - Y_i > 0$$

sigue la distribución binomial $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. El test de los signos sería un test no paramétrico adecuado para contrastar $H_0$ frente $H_1$, pues la distribución de $k$, bajo $H_0$, no depende de la distribución de $(X,Y)$. También podríamos utilizar el test del signo-rango de Wilcoxon.

C.M. Cuadras y D. Cuadras
Universitat de Barcelona